PERIODICAL UNIVERSITY OF HAWAII LIBRARY 5856-171

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

52. BAND, 1. HEFT
MIT 11 ABBILDUNGEN
AUSGEGEBEN IM MÄRZ 1948)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1948

Mh. Math.
77
52 53

Die

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20—25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität, Wien IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

52. Band/1. Heft

Inhaltsverzeichnis

Seite

Hornich, H. Wilhelm Wirtinger † 1

Wunderlich, W. Spiegelung am elliptischen Paraboloid 13

Gröbner, W. Über die Konstruktion von Systemen orthogonaler Polynome in ein- und zweidimensionalen Bereichen 38

Vietoris, L. Über den Begriff der Wahrscheinlichkeit 55

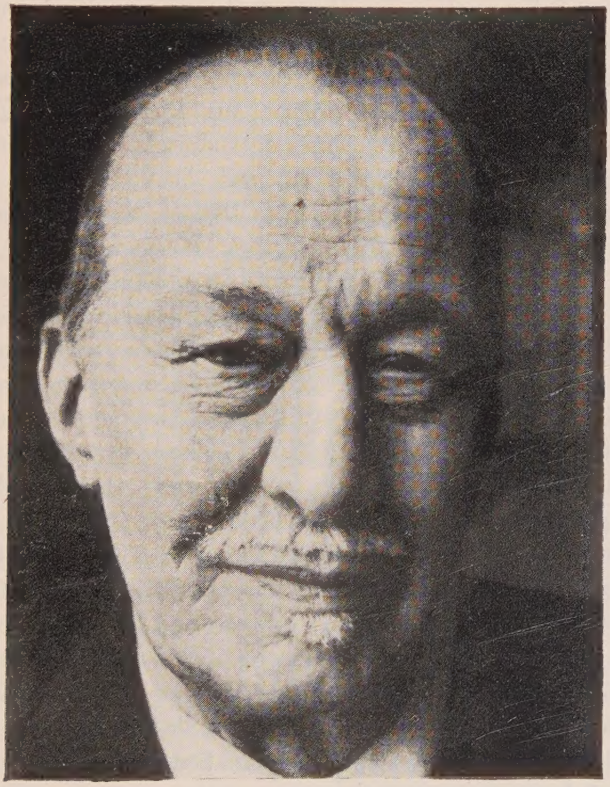
Buchbesprechungen 86

Wilhelm Wirtinger †.

Von

Hans Hornich, Wien.

Am 16. Jänner 1945 starb nach kurzem Leiden in seiner Heimatstadt Ybbs/Donau in Niederösterreich im achtzigsten Lebensjahr *Wilhelm Wirtinger*, einer der bedeutendsten österreichischen Mathe-



matiker, 1903—35 ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Wien und seit 1903 Herausgeber der „Monatshefte für Mathematik und Physik", welcher Zeitschrift er sein besonderes Interesse bis zuletzt bewahrt hat.

Er wurde am 19. Juli 1865 in Ybbs geboren als Sohn des Primararztes Dr. *Johannes Ev. Wirtinger*, eines wissenschaftlich sehr interessierten Mannes, dem u. a. die Entdeckung der sogenannten Typhuskurve zu verdanken ist. Seine Kindheit verlebte er in seinem Heimatort, dem er stets eine anhängliche Liebe bewahrte, die ihn auch seine letzten Lebensjahre dort verbringen ließ. In seinem achten Lebensjahr erkrankte er an einer schweren Scharlachdiphterie, als deren Folge er eine dauernde Schwerhörigkeit davontrug, die ihn zeitlebens im Verkehr sehr behinderte. Das Gymnasium besuchte er bei den Benediktinern in Seitenstetten, später in Melk und in St. Pölten; hier erlangte er durch allerdings ziemlich unsystematisches Lesen in den damals üblichen Lehrbüchern, aber auch in den Originalarbeiten von *Newton* und *Euler* aus der Stiftsbibliothek eine gewisse Gewandtheit in der Handhabung des Infinitesimalkalküls. Es ist bemerkenswert, daß ihm damals bereits der Begriff der Riemannschen Fläche aus *Riemanns* Werken völlig geläufig war und daß er *Neumanns* mechanische Wärmetheorie und seine Vorlesungen über Abelsche Integrale las.

Auf der Universität Wien, die er von 1884 an besuchte, waren seine Lehrer *Emil Weyr* und *Gustav Escherich*. *Weyr* weckte in ihm das Interesse für synthetische Geometrie, dem auch seine ersten Publikationen (1, 2 des anschließenden Verzeichnisses), sowie seine (nicht veröffentlichte) Dissertation „Über eine kubische Involution in der Ebene" (1887) entsprangen. *Escherich* hat die damals erst langsam in weitere Kreise dringenden Weierstraßschen Ideen und dessen Art der Darstellung der Analysis dem jungen *Wirtinger* vermittelt; er lernte jetzt systematischer und genauer denken und arbeiten; aber seine Vorliebe gehörte damals und in der Folge stets den durch *Riemann* angeregten Methoden der Funktionentheorie und dem Streben nach möglichster Veranschaulichung durch geometrische Gebilde. Durch ein Reisestipendium konnte er ein Jahr in Berlin und Göttingen verbringen. In Berlin hörte er *Weierstraß*, *Kronecker* und *Fuchs*, ohne aber trotz vieler Eindrücke einen bleibenden Anschluß zu finden. In Göttingen las *Felix Klein* Abelsche Funktionen und partielle Differentialgleichungen der Physik; hier gewann Wirtinger zumal im Seminar, das er (gemeinsam mit *Osgood*) besuchte, sofort vielseitigste Anregung und es verband ihn mit *F. Klein* eine aufrichtige Freundschaft bis zu dessen Tod.

1890 habilitierte sich *Wirtinger* an der Universität Wien. Eine Assistentenstelle bei *E. Czuber* an der Technischen Hochschule ermöglichte ihm im selben Jahr die Heirat mit seiner aus der gleichen Heimat

stammenden Frau *Amalia*, geb. *Feyertag*. Seine Frau, die mit vieler Liebe für ihn sorgte, trat niemals in den Vordergrund seines beruflichen Lebens. Sie starb wenige Jahre vor seinem Tod. Der Ehe entstammten drei Söhne und zwei Töchter. Zwei seiner Söhne starben kurz vor, bzw. im ersten Weltkrieg.

In diesen Jahren schrieb *Wirtinger*, durch die Assistentenstelle nur wenig in Anspruch genommen, eine Reihe von Arbeiten (4, 8, 9, 10), als deren Abschluß die große von der philosophischen Fakultät in Göttingen 1895 mit dem Beneke-Preis ausgezeichnete Arbeit „Untersuchungen über Thetafunktionen" (14) erschien. Es handelt sich dabei um folgende Probleme: Die Reihe

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{n_1, \ldots, n_p = -\infty}^{+\infty} e^{\pi i \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \tau_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{p} v_\alpha n_\alpha}$$

stellt für beliebige endliche v_α eine ganze Funktion in jeder der Variablen v_α dar, wenn die $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$ so beschaffen sind, daß die $\Im(\tau_{\alpha\beta})$ das Koeffizientenschema einer positiv definiten quadratischen Form darstellen; das sind die allgemeinen Thetafunktionen. Wählt man für die v_α die Normalintegrale eines algebraischen Gebildes vom Geschlechte p und für die $\tau_{\alpha\beta}$ die Perioden dieser Integrale, so erhält man die speziellen algebraischen oder Riemannschen Theta. *Wirtinger* hat nun gezeigt, und das ist ein Hauptresultat seiner tiefliegenden Untersuchungen, daß auch die allgemeinen Theta sich durch algebraische Theta gewinnen lassen: Es gibt spezielle algebraische Gebilde mit einem Geschlecht $q > p$, deren algebraische Thetafunktionen nach einer Transformation in das Produkt einer Thetafunktion von p und einer von $q - p$ Variablen zerfallen, so daß die ersteren vorgegebene allgemeine Theta ergeben. Die Konstruktion dieser speziellen algebraischen Gebilde hat nun *Wirtinger* durch ein von ihm eingeführtes eigenartiges Verfahren angegeben: Es werden z. B. zwei kongruente Riemannsche Flächen vom Geschlecht $p+1$ längs eines die Fläche nicht zerlegenden Querschnittes miteinander verheftet; die durch eine solche unverzweigte Verbindung entstehende Fläche hat doppelt soviele Blätter und Verzweigungen als die ursprüngliche Fläche, ist also vom Geschlecht $2p+1$. Die $2p+1$ Integrale erster Gattung dieses Gebildes setzen sich aus den $p+1$ Integralen der ursprünglichen Fläche und p weiteren Integralen zusammen, welch letztere von $3p$ Parametern abhängen und daher

allgemeinere als die Riemannschen Theta liefern. Diese Theta wurden nun von *Wirtinger* im zweiten Teil seiner Preisarbeit näher untersucht und ihre Theorie analog wie die der Riemannschen aufgebaut.

Die allgemeinen Thetafunktionen behandelt *Wirtinger* im ersten Teil seiner Arbeit, indem er $2p$ linear unabhängige Thetaquadrate als homogene Koordinaten eines Raumes von $2^p - 1$ Dimensionen interpretiert; bei variablen $v_1, \ldots, v_p$ erhält man eine algebraische Mannigfaltigkeit von p Dimensionen in diesem Raum, die für $p = 2$ die Kummersche Fläche ist. Diese Beziehung der allgemeinen Thetafunktionen zu einem algebraischen Gebilde gibt dann die Möglichkeit, die erwähnte Verbindung zwischen den allgemeinen und algebraischen Theta herzustellen.

Auf Grund dieser bedeutsamen Arbeiten wurde *Wirtinger* 1895 als Extraordinarius nach Innsbruck berufen, wo er eine sehr vielseitige und ausgedehnte Vorlesungstätigkeit entfaltete. Daneben erschien wieder eine Reihe von Arbeiten..

Zunächst eine Arbeit über Schwingungsprobleme bei Saiten von veränderlicher Dichte (15); hier wird, also vor Einführung der Integralgleichungen, gezeigt, daß die Frequenzen der Schwingungen einer unendlich langen Saite mit periodischer Dichte eine unendliche Folge von Intervallen erfüllen; in dieser Arbeit liegt also der Keim und der Anstoß für die moderne Theorie der Spektren bei solchen Differentialgleichungen, welche diese Bezeichnung aus der *Wirtinger*schen Arbeit übernommen hat.

Für den Abel-Festband der „Acta Mathematica schrieb *Wirtinger* über Aufforderung *Mittag-Lefflers* zwei Arbeiten (25, 26), von denen die eine über die *Euler*sche Summenformel infolge der ungemein einfachen Herleitung dieser Formel und des sich dabei zwanglos ergebenden Zusammenhanges mit den *Bernoulli*schen Funktionen heute überall zur Darstellung dieser Dinge verwendet wird. Die zweite Arbeit gilt, wie auch mehrere andere Arbeiten (13, 16) den $2p$-fach periodischen Funktionen: hier wird gezeigt, daß ein beliebiges Parallelotop im reellen R_{2p} durch Einführung von n komplexen Variablen, deren Real- und Imaginärteil aus den $2p$-reellen Koordinaten des R_{2p} durch orthogonale Transformation hervorgehen, in diesen neuen komplexen Variablen als ein die Bilinearrelationen der $2p$-fach periodischen Funktionen erfüllendes Gebiet sich darstellt. Anläßlich des Abel-Jubiläums in Oslo wurde übrigens *Wirtinger* das Ehrendoktorat der Universität Oslo verliehen.

In die Innsbrucker Jahre fällt auch die Abfassung des Artikels „Algebraische Funktionen und ihre Integrale" für die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften; der Artikel „Abelsche und $2n$-fach periodische Funktionen" sollte von *Wirtinger* und *Krazer* gemeinsam verfaßt werden; aber eine doch mehr kompilatorische Tätigkeit war *Wirtinger* nicht gelegen und so wurde die endgültige Redaktion dieses zweiten Artikels von *Krazer* allein besorgt. Überhaupt war die ganze Art *Wirtingers* viel zu sehr auf neue Gedanken und Probleme gerichtet, als daß er zur Abfassung von Lehrbüchern oder auch nur von zusammenhängenden Berichten sich entschließen hätte können.

1903 wurde *Wirtinger* als Nachfolger *Gegenbauers* als ordentlicher Professor nach Wien berufen und blieb in dieser Stellung durch 32 Jahre bis zum Ende seiner Lehrtätigkeit im Jahre 1935. Seine Kollegen waren zunächst *Escherich* und *Mertens*, und nach deren Ausscheiden *Ph. Furtwängler* und *H. Hahn*. Die Geometrie vertrat *G. Kohn*, später (ab 1927) *Karl Menger*.

In den Vorlesungen wurde ein dreijähriger Zyklus eingehalten, so daß jeder Professor jedes dritte Jahr die Anfangsvorlesung zu halten hatte. In den beiden anderen Jahren pflegte *Wirtinger* gewöhnlich Funktionentheorie und im letzten Jahr über algebraische oder elliptische Funktionen zu lesen. Neben diesen Hauptvorlesungen lief dann das zweistündige Seminar, in dem er infolge seiner Schwerhörigkeit meist selbst vortrug, sowie eine Proseminar- und eine Übungsstunde, in welcher er in den letzten Jahren seiner Tätigkeit gern Archimedeslektüre betrieb, wozu ihn seine guten Kenntnisse des Griechischen und seine Vorliebe für diesen Forscher besonders anzog.

Seine Vorlesungen erforderten eifrigstes Mitarbeiten und nachheriges gründlichstes Überdenken. Denn sein Vortrag beschränkte sich nicht auf eine vorgezeichnete Linie, sondern griff immer wieder, seinem universalen Wissen und seiner ganzen Denkungsart gemäß, auf verwandte Gebiete über; so kamen insbesondere auch stets geometrische Gesichtspunkte zur Geltung, wie in der Funktionentheorie die Differentialgeometrie und bei den algebraischen Funktionen sehr ausführlich die Theorie der algebraischen Kurven. Daher war eine Vorlesung bei *Wirtinger* auch für den, der das Gebiet schon kannte, immer noch fruchtbar, jedoch dem gewöhnlichen Hörer schwierig, so daß selbst in der Zeit der Überfüllung aller Hochschulen, wo etwa bei *Furtwängler* oder *Hahn* an die 400 Hörer waren, bei *Wirtinger* meist kaum 50 Hörer saßen. Im Seminar waren wohl nie mehr als 3 bis 4;

hier trug er seine Arbeiten unmittelbar nach ihrer Entstehung, bevor er sie noch zusammengeschrieben hatte, vor. In diesem Kreis war *Wirtinger* der ideale Hochschullehrer; alle, die hier seine Schüler waren, haben von ihm reichste Anregungen erfahren und ich erinnere mich dankbar der langen Zeit, in der ich seinen persönlichen Unterricht erfahren durfte.

An äußeren Ehrungen erwähne ich noch die Verleihung der Sylvester-Medaille durch die Royal Society, zu deren Empfang er 1907 nach England reiste und wohin er 1920 wiederum auf einige Wochen nach Cambridge eingeladen wurde. Seit 1905 war *Wirtinger* wirkliches Mitglied der Wiener Akademie, als korrespondierendes Mitglied gehörte er der Göttinger und der Berliner Akademie, sowie seit 1927 der Päpstlichen Akademie der Wissenschaften an. Im Studienjahre 1915/16 war er Dekan der philosophischen Fakultät; von seinen sonstigen Ämtern, die er trotz zunehmender Schwerhörigkeit gewissenhaft versah, erwähne ich die mühevolle Mitgliedschaft an der Prüfungskommission für das Lehramt an Mittelschulen und der Kommission für das Versicherungswesen.

Ich komme nun zu den Arbeiten *Wirtingers* in dieser Periode. Diese entstanden meist im Anschluß an die Vorlesungen: der einfache Beweis des *Hadamard*schen Determinantensatzes (33, 34), über besondere Dirichletsche Reihen (32), zur Partialbruchzerlegung (40), über den Weierstraßschen Vorbereitungssatz (48), der einen besonderen eleganten Beweis liefert, über die konforme Abbildung der Riemannschen Fläche durch Abelsche Integrale, besonders für $p = 1, 2$ (36). Die hypergeometrischen Funktionen haben *Wirtinger* wiederholt beschäftigt (27, 28, 29, 30, 49); er hätte auch die Vorlesungen von *F. Klein* über dieses Thema auf dessen Wunsche herausgeben sollen, kam aber nicht dazu, so daß dann *O. Haupt* die Herausgabe besorgte. Eine Reihe von Arbeiten galt den Entwicklungen der allgemeinen Differentialgeometrie, die im Anschluß an die Relativitätstheorie entstanden (39, 41, 42, 43) und meist einen mehr allgemeinen und erkenntnistheoretischen Charakter trugen.

Anstatt nun auf einzelne dieser Arbeiten näher einzugehen, ziehe ich es vor, aus den unveröffentlichten Ergebnissen, wie sie *Wirtinger* im Seminar mitgeteilt hat, einiges anzuführen, das sich eng an den Problemkreis seiner Preisarbeit (14) anschließt.

Die *Weber-Noether*sche Normalkurve eines algebraischen Gebildes vom Geschlecht 5 ist eine C_8 des R_4, die (wenn keine dreiwertigen

Funktionen auftreten) der Schnitt dreier Hyperflächen zweiter Ordnung ist:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = \sum_{i,k} b_{ik} x_i x_k = \sum_{i,k} c_{ik} x_i x_k = 0$$

Die allgemeinste quadratische Hyperfläche, die die C_8 enthält, hat die Form

$$\sum_{i\,k,} \left(\xi_1 a_{ik} + \xi_2 b_{ik} + \xi_3 c_{ik} \right) x_i x_k = 0$$

und ist ein Kegel, wenn die Determinante

$$\left| \xi_1 a_{ik} + \xi_2 b_{ik} + \xi_3 c_{ik} \right| = 0 \qquad (ik = 1, \ldots, 5)$$

Deutet man die ξ_i als Punktkoordinaten einer Ebene, so erhalten wir eine singularitätenfreie C_5 vom Geschlecht 6. Nehmen wir einen Punkt dieser C_5, bzw. den entsprechenden Kegel des R_4; schneidet man den Kegel durch einen linearen R_3 nach zwei Ebenen, so enthält jede dieser Ebenen vier Punkte der Normalkurve C_8. Es sind dann jedem Kegel zwei Scharen von korresidualen Quadrupeln der C_8 zugeordnet, so daß die Summe der Integrale erster Gattung für diese Quadrupeln bei geeigneter Normierung w_i bzw. $-w_i$ sind. Denkt man sich die ebene C_5 doppelt überdeckt, so können wir jedem Punkt dieser doppelt überdeckten C_5 eindeutig ein korresidual verschiebbares Quadrupel der C_8, bzw. ein Wertesystem w_i zuordnen. Diese Doppelüberdeckung der C_5 ist eine unverzweigte und zusammenhängende; das Geschlecht dieses Gebildes ist dann 11 und die 5 außer den früheren Integralen erster Gattung noch ausstehenden Integrale erster Gattung werden gebildet durch Integrale über Wurzelfunktionen zweiter Stufe, die Kurven vierter Ordnung entsprechen, die die C_5 in 10 Punkten berühren. Die zugehörigen Thetafunktionen sind wieder *Wirtinger*sche Theta von fünf Variablen. Von Interesse ist dann noch der Ort aller Kegelspitzen, eine C_{10} im R_4; ferner der Fall, daß das algebraische Gebilde, von dem wir ausgingen, eine dreiwertige Funktion enthält.

Zur Feier seines siebzigsten Geburtstages versammelten sich die zahlreichen Freunde, Kollegen, Schüler und viele Hörer *Wirtingers* in dem freundlichen niederösterreichischen Städtchen Ybbs, wo dieser seit langem ein kleines Häuschen besaß und wo er stets seine Ferienzeit verbrachte. Aber das gleichmäßige, nur der Arbeit gewidmete Leben *Wirtingers* erfuhr durch das Aufhören der Lehrtätigkeit zunächst

wenig Änderung: täglich kam er während der Vorlesungszeit nach wie vor ins mathematische Seminar in sein Arbeitszimmer, wo er nun von der Last der Vorlesungen und den damit verbundenen Ämtern befreit, nur mehr der Ausarbeitung seiner Ideen leben konnte. So kam es, daß gerade im letzten Jahrzehnt seines Lebens noch mehrere wertvolle größere Arbeiten von ihm fertiggestellt werden konnten.

Die erste Arbeit dieser Reihe (63, 65) zeigt eine Determinantenidentität, die in geometrischer Formulierung besagt: In einem R_{2n} mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_{2n}$ und mit $z_a = x_a + ix_{a+n}$, $\bar{z}_a = x_a - ix_{a+n}$, $(a = 1, \ldots, n)$ ist das Volumen eines von $2m$ Vektoren $(m < n)$ aufgespannten Parallelotopes $\geqq$ der Summe der Projektionen auf die sämtlichen $2m$-dimensionalen Koordinatenhyperebenen $(z_{a_1}, \ldots, z_{a_m}$ $\bar{z}_{a_1} \ldots \bar{z}_{a_m})$, und zwar gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn das Parallelotop in einer analytischen, komplex m-dimensionalen Mannigfaltigkeit liegt. Anschließend wird eine Integralinvariante für eine $2m$-dimensionale Mannigfaltigkeit aufgestellt, die stets $\leqq$ dem $2m$-dimensionalen Volumen dieser Mannigfaltigkeit ist, wo das Gleichheitszeichen wieder nur steht, wenn die Mannigfaltigkeit analytisch ist.

Für algebraische Gebilde ergeben sich dabei merkwürdige Beziehungen zu Ordnung und Klasse, sowie zur curvatura integra, welche allerdings nicht mehr näher ausgeführt wurden. Eine weitere Arbeit (66) gilt im Anschluß an diese einer Ausdehnung des Cauchyschen Residuensatzes auf mehrere komplexe Veränderliche und damit einer sinnvollen Definition der Ordnung einer $2p$-fach periodischen Funktion für $p > 1$.

Lange hat sich *Wirtinger* mit Translationsmannigfaltigkeiten beschäftigt (67, 69). Eine Translationsmannigfaltigkeit von m Dimensionen in einem R_n entsteht dadurch, daß man aus m Kurven $x_a = x_{a\lambda}(t_\lambda)$ $(\lambda = 1, \ldots, m)$ durch Parallelverschiebung jeder dieser Kurven die Fläche bildet:

$$X_a = \sum_{\lambda=1}^{m} x_{a\lambda}(t_\lambda)$$

Es entsteht die Frage nach den Flächen, die auf mehr als eine Art als Translationsmannigfaltigkeit erzeugt werden können. Diese von *Lie* gestellte und im einfachsten Fall von ihm, sowie *Poincaré*, *Darboux* und *Scheffers* behandelte Frage wurde erst von *Wirtinger* mit ganz neuen Methoden und in großer Allgemeinheit gelöst; er hat gezeigt, daß, wenn eine Fläche auf zwei Arten als Translationsmannigfaltigkeit

darstellbar sein soll, die Funktionen $x_{a\lambda}$ die Abelschen Integrale erster Gattung eines Gebildes vom Geschlecht $m+1$ sein müssen und die Fläche selbst als die Nullmannigfaltigkeit einer entsprechenden Thetafunktion dieses Gebildes sich darstellt. Überraschend ist dabei, daß zur Formulierung des Satzes keinerlei Bezug auf analytische Eigenschaften der Fläche genommen wird; die $x_{a\lambda}$ werden nur als viermal stetig differenzierbare Funktionen der t_λ angenommen.

Diese umfangreiche Arbeit, von der eine Reihe geometrisch interessanter Spezialfälle sich abzweigen (69), ist eine der schönsten Arbeiten der mathematischen Literatur der letzten Jahrzehnte.

Die letzte publizierte Arbeit endlich (71) behandelt einen Zusammenhang zwischen den Integralen dritter Gattung und linear polymorphen Funktionen, das sind solche, die bei Durchlaufung geschlossener Wege lineare Transformationen erfahren.

Ein wie großes Interesse *Wirtinger* auch der Physik, Astronomie und sogar solchen Wissenschaften, die fern der Mathematik liegen, wie Sprachen und Literatur, entgegenbrachte, ist jedem, der mit ihm oft beisammen war, bekannt; sein Interesse war auch nie bloß ein dilettantisches, sondern sein Wissen reichte immer bis ins Wesentliche der Wissenschaft. In seiner universellen Bildung hatte er wohl wenige seinesgleichen.

In der Welt der Mathematiker war *Wirtinger* eine Größe, bedeutend durch die Fülle der Anregungen und neuen Gedanken, die von ihm ausgingen, ebenso wie durch die Zahl und den Inhalt seiner Publikationen. Dies kam auch in den internationalen Mathematikerkongressen, die *Wirtinger* gern besuchte, zum Ausdruck, wo er stets ein ausgezeichneter Repräsentant Österreichs war.

Die letzten Lebensjahre hat er wieder in seiner Heimat Ybbs verbracht, bis zuletzt geistig frisch und mit neuen mathematischen Arbeiten beschäftigt.

Verzeichnis der Arbeiten.

1. Über die Brennpunktkurve der räumlichen Parabel, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 94 (1886), 302—309.
2. Über rationale Raumkurven 4. Ordnung, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 93 (1886), 28—45.
3. Beitrag zur Theorie der homogenen linearen Differentialgleichung, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 98 (1889), 66—72.
4. Über das Analogon der Kummerschen Fläche für p = 3, Gött. Nachr. (1889), 474—480.

5. Bemerkungen über ganzzahlige irreduktible Gleichungen, Mh. Math. Phys. 1 (1890), 47—48.
6. Über Funktionen, welche gewissen Funktionalgleichungen genügen, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 99 (1891), 918—925.
7. Bemerkung über elliptische Modulfunktionen, Mh Math. Phys. 1 (1890), 429—432.
8. Über eine Verallgemeinerung der Kummerschen Fläche und ihre Beziehungen zu den Thetafunktionen zweier Variablen, Mh. Math. Phys. 1 (1890), 113—128.
9. Zur Theorie der Abelschen Funktionen vom Geschlecht 3, Mh. Math. Phys. 2 (1891), 55—66.
10. Untersuchungen über Abelsche Funktionen vom Geschlecht 3, Math. Ann. 40 (1891), 261—312.
11. Über die Rektifikation algebraischer Kurven, insbesondere derjenigen 3. Ordnung bei projektiver Maßbestimmung, Mh. Math. Phys. 5 (1894), 92—96.
12. Über eine Eigenschaft der Wendetangenten der Kurve 3. Ordnung, Mh. Math. Phys. 4 (1893), 395—397.
13. Zur Theorie der 2n-fach periodischen Funktionen 1, Mh. Math. Phys. 6 (1895), 69—98.
14. Untersuchungen über Thetafunktionen, Leipzig, B. G. Teubner 1895.
15. Beitrag zu Riemanns Integrationsmethode für hyperbolische Differentialgleichungen und deren Anwendungen auf Schwingungsprobleme, Math. Ann. 48 (1897), 365—389.
16. Zur Theorie der 2n-fach periodischen Funktionen 2, Mh. Math. Phys. 7 (1896), 1—25.
17. Über eine Eigenschaft des Potentials unter Annahme eines Greenschen Wirkungsgesetzes, S. B. Akad. Wiss. Wien, 105 (1896), 575—586.
18. Über die Beziehungen der Kummerschen Fläche zur projektiven Erzeugung der ebenen Kurven 4. Ordnung mit Doppelpunkt, J. Deutsche Math. Ver. 4 (1897), 97—99.
19. Über die Greensche Funktion eines von getrennten sphärischen Mannigfaltigkeiten begrenzten Gebietes, Gött. Nachr. (1897), 244—246.
20. Zur Theorie der automorphen Funktionen von n-Veränderlichen, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 108 (1899), 1239—1249.
21. Karl Schober (Nachruf), J. Deutsche Math. Ver. 8 (1900), 66.
22. Eduard Wiltheiß (Nachruf), J. Deutsche, Math. Ver. 9 (1901), 59—63.
23. Geodätische Linien und Ponceletsche Polygone, J. Deutsche Math. Ver. 9 (1901), 130—131.
24. Algebraische Funktionen und ihre Integrale, Enz. d. math. Wiss. 2, 2.
25. Über einige Probleme in der Theorie der Abelschen Funktionen, Acta Math. 26 (1902), 133—156.
26. Einige Anwendungen der Euler-Maclaurinschen Summenformel, insbesondere auf eine Aufgabe von Abel, Acta Math. 26 (1902), 255—272.
27. Zur Darstellung der hypergeometrischen Funktion durch bestimmte Integrale, S. B. Akad. Wiss. Wien, 111 (1902), 894—900.
28. Eine neue Verallgemeinerung der hypergeometrischen Integrale, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 112 (1903), 1721—1733.
29. Riemanns Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe und ihre Bedeutung, Verh. d. 3. internat. Math. Kongr. Heidelberg.
30. Über die Anzahl der linear unabhängigen hypergeometrischen Integrale, S. B. Akad. Wiss. Wien, 114 (1905), 1571—1588.
31. Über die Entwicklung einiger mathematischer Begriffe in neuerer Zeit, Wien, Hölder, 1906.

32. Über eine besondere Dirichletsche Reihe, J. reine angew. Math. 129 (1905), 214—19.
33. Sur le theoreme de M. Hadamard relatif aux determinants, Darb. Bull. (3), 31 (1907), 175—179.
34. Zum Hadamardschen Determinantensatz, Mh. Math. Phys. 18 (1907), 158—160.
35. Bemerkungen zur Theorie der vollständigen Differentiale, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 118 (1909), 1373—1377.
36. Über die konforme Abbildung der Riemannschen Fläche durch Abelsche Integrale, insbesondere bei $p = 1, 2$, Wien, Denkschriften 85.
37. (Zusammen mit Krazer). Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen, Enz. d. math. Wiss. II, B, 7, 1920.
38. Über eine spezielle Lösung der Differentialgleichung $yy'' = mx^2$, S.-B. Akad. Wiss. Wien, 128 (1919), 3—8.
39. On a general infinitesimal geometry in reference to the theory of relativity, Anz. Akad. Wiss. Wien, 59 (1922), 160.
40. Bemerkung zur Partialbruchzerlegung, Mh. Math. Phys. 31 (1921), 58—59.
41. On a general infinitesimal geometry in reference to the theory of relativity, Cambridge Philosophical Soc. Trans. 22 (1922), 439—448.
42. Über allgemeine Maßbestimmungen, in welchen die geodätischen durch lineare Gleichungen bestimmt werden, Mh. Math. Phys. 33 (1923), 1—14.
43. Allgemeine Infinitesimalgeometrie und Erfahrung, Hamb. math. Einzelschr. 3.
44. Zur formalen Theorie der Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen, Math. Ann. 97 (1927), 357—375.
45. Zur Theorie der Systeme totaler Differentialgleichungen, Mh. Math. Phys. 34 (1926), 81—88.
46. Bemerkungen zum Studyschen projektiven Bogenelement, Mh. Math. Phys. 34 (1926), 37—40.
47. Mitwirkung an der Redaktion der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (zweiter Band).
48. Über den Weierstraßschen Vorbereitungssatz, J. reine angew. Math. 158 (1927), 260—267.
49. Über die konforme Abbildung der Ebene auf ein Kreisbogendreieck, Atti Pontif. Accad. 80 (1927), 291—309.
50. Über einen grundlegenden Satz der Invariantentheorie, Mh. Math. Phys. 35 (1928), 219—222.
51. Über symmetrisierbare Determinanten, Anz. Akad. Wiss. Wien, 67 (1920), 121—123.
52. Über den asymptotischen Wert des Integrals $\int_0^\infty x^k e^{-e^x} dx$, Mh. Math. Phys. 37 (1930), 343—348.
53. Über einige bestimmte Integrale, welche mit der Riemannschen Zetafunktion zusammenhängen. Atti Pontif. Accad. 83 (1930), 120—127.
54. Bemerkungen zu dem Aufsatz „Über die Äquivalenz dynamischer Probleme", von Erwin Schuntner, Wien, Mh. Math. Phys. 39 (1932), 241—243.
55. Bemerkungen über das Integral $\int_0^\infty z^s e^{-e^z} dz$, Mh. Math. Phys. 39 (1932), 239—241.
56. Über eine Minimalaufgabe im Gebiete der analytischen Funktionen, Mh. Math. Phys. 39 (1932), 377—384.
57. Ein anderer Beweis des Satzes, daß zwei singularitätenfreie Kurven von einer Ordnung $n \geqq 4$ notwendig kollinear sind, wenn sie eindeutig aufeinander bezogen sind, S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 3 (1932), 145—147.

58. Über das Fehlerglied bei numerischer Integration, Z. angew. Math. Mech. 13 (1933), 166—168.
59. Gustav v. Escherich (Nachruf), Mh. Math. Phys. 42 (1935), 1—6.
60. Konrad Zindler (Nachruf), Mh. Math. Phys. 42 (1935), 215—220.
61. Note zur Theorie der schlichten Funktionen, Studia Math. 4 (1933), 66—69.
62. Über eine spezielle Aufgabe der Potentialtheorie, S. B. Akad. Wiss. Wien, 145 (1936), 96—99.
63. Eine Determinantenidentität und ihre Anwendung auf analytische Gebilde in euklidischer und hermitscher Maßbestimmung, Mh. Math. Phys. 44 (1936), 343—365.
64. Berichtigung zu der Arbeit „Über eine spezielle Aufgabe der Potentialtheorie", S. B. Akad. Wiss. Wien, 145 (1936), 529.
65. Der Satz von Bezout und eine Integralinvariante, Mh. Math. Phys. 45 (1937), 332—334.
66. Ein Integralsatz über analytische Gebilde im Gebiete von mehreren komplexen Veränderlichen, Mh. Math. Phys. 45 (1937), 418—431.
67. Lie's Translationsmannigfaltigkeiten und Abelsche Integrale, Mh. Math. Phys. 46 (1938), 384—431.
68. Über eine Minimalaufgabe im Gebiete der analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen, Mh. Math. Phys. 47 (1939), 426—431.
69. Translationsmannigfaltigkeiten, welche zu Kurven von Geschlecht Null oder Eins gehören, Mh. Math. Phys. 48 (1940), 30—40.
70. Zur Theorie mehrfach zusammenhängender ebener Flächen, S. B. preuß. Akad. Wiss. (1942), Math. Naturwiss. Kl. Nr. 4, 2—9.
71. Integrale dritter Gattung und linear polymorphe Funktionen, Mh. Math. Phys. 51 (1944), 101—114.

Spiegelung am elliptischen Paraboloid

Von

Walter Wunderlich, Wien.

Mit 9 Abbildungen.

(Eingelangt am 11. Dezember 1942.)

1. Einleitung.

Seit jeher hat die Spiegelung an gekrümmten Oberflächen das Interesse von Geometern wachgerufen. Neben vorwiegend differentialgeometrischen Untersuchungen für beliebige analytische Spiegelflächen[1] und solchen abzählender Natur für algebraische[2] waren es immer wieder besonders die Flächen zweiten Grades, deren Spiegeleigenschaften die Aufmerksamkeit fesselten. Hierher gehören vor allem die Arbeiten von *J. Plücker*[3], *O. Staude*[4] und *S. Finsterwalder*[5].

Abgesehen von früheren unvollkommenen Versuchen[6] hat sich die Darstellende Geometrie eigentlich erst in letzter Zeit mit diesem dankbaren Gebiet zu beschäftigen begonnen. So hat *H. Horninger* eine systematische Untersuchung der Reflexionserscheinungen auf rein geometrischem Wege unternommen[7], wobei er die wichtigsten hierhergehörigen differentialgeometrischen Eigenschaften herleiten und in algebraischer Hinsicht sogar manche Ergänzung geben konnte. Eine zweite Arbeit behandelt die „Fokalspiegelung" an Flächen zweiten

---

[1] *W. R. Hamilton*, Abhandlungen zur Strahlenoptik. Neuausgabe von *R. Prange* (Leipzig 1933).

[2] *A. Del Re*, Über die Theorie der Systeme von Reflexstrahlen. Rend. circ. mat. Palermo **1** (1887).

[3] Sur la Réflexion de la Lumière, dans le cas des surfaces du second degré, analogue à celle qui aux foyers des sections coniques a donné le nom. Crelle J. **35** (1847).

[4] Eine katoptrische Eigenschaft des Ellipsoides. Math. Ann. **27** (1886).

[5] Katoptrische Eigenschaften der Flächen zweiten Grades. Sitzungsber. bayr. Ak. Wiss. **17** (1887).

[6] *J. N. P. Hachette*, Traité de géométrie descriptive (Paris 1828), S. 251ff. — *R. Niemtschik*, Neue Konstruktionen der auf ebenen und krummen Flächen erscheinenden Reflexe und hierauf bezügliche Theoreme. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien **53** (1866).

[7] Zur geometrischen Theorie der Spiegelung an krummen Oberflächen. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien **145** (1936).

Grades[8]; *Horninger* nimmt dabei das Auge des Betrachters auf einer Fokalkurve der spiegelnden Fläche an und erreicht durch diese Wahl eine besondere Einfachheit in konstruktiver Hinsicht.

Der vorliegende Aufsatz ist der Spiegelung am elliptischen Paraboloid bei achsenparalleler Blickrichtung gewidmet, wobei schon deshalb besondere Verhältnisse zu erwarten sind, weil das Auge gleichzeitig auf zwei Fokalkurven liegt. Die Arbeit erschien kurz nach ihrer Entstehung durch die zuletzt genannte Abhandlung zum Teil überholt; die nachträgliche Entdeckung einer Reihe weiterer bemerkenswerter Beziehungen bei dieser Spiegelung läßt eine Veröffentlichung nun doch lohnend erscheinen. — Im übrigen beschränkt sich die Arbeit nicht auf die Bestimmung von „Reflexen" auf der spiegelnden Fläche, sondern es werden — in Betonung des darstellend-geometrischen Standpunktes — grundsätzlich deren Projektionen aus dem Auge, also die eigentlichen „Spiegelbilder" betrachtet; dies bringt gleichzeitig beachtliche Vereinfachungen mit sich.

Der Grenzfall des Drehparaboloides weist stark ausgeartete Abweichungen auf und fand zusammen mit anderen Sonderfällen von Spiegelungen an Flächen zweiten Grades eine selbständige Darstellung in einer früheren Arbeit[9]. Die Behandlung des spiegelnden hyperbolischen Paraboloides und des parabolischen Zylinders mag eigenen Aufsätzen vorbehalten bleiben. —

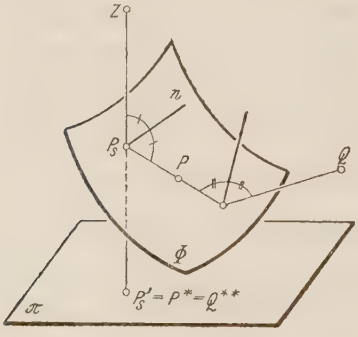


Abb. 1. Entstehung von Spiegelbildern.

Zunächst einiges Grundsätzliche zur Spiegelung an einer krummen Oberfläche Φ: Unter den von einem Raumpunkt P ausgehenden Lichtstrahlen kann es einen (oder auch mehrere) geben, der beim Auftreffen auf Φ so reflektiert wird, daß er in das Sehzentrum Z gelangt und daselbst einen aus der Richtung des „Spiegelpunktes" oder „Reflexes" P_s kommenden Bildeindruck hervorruft (Abb. 1). Dessen Riß P_s' aus Z auf eine beliebige Bild- und Zeichenebene π — meist als „optische

[8] Über die Fokalspiegelung an Flächen zweiten Grades. Mh. Math. Phys. **45** (1936).

[9] *W. Wunderlich*, Darbouxsche Verwandtschaft und Spiegelung an Flächen zweiten Grades. Deutsche Math. **7** (1943).

Projektion" bezeichnet — soll kurz das „Spiegelbild" P^* von P genannt werden.

Die Reflexion in P findet dabei bekanntlich so statt, daß der Winkel zwischen dem einfallenden „Spiegelstrahl" (Reflexstrahl) PP_s und dem austretenden Sehstrahl P_sZ von der Flächennormale n gehälftet wird. Die Gesamtheit aller ∞^2 Spiegelstrahlen ergibt sich durch Spiegelung des Sehstrahlbündels Z an Φ; diese Spiegelstrahlkongruenz besteht nach dem Satz von *Malus-Dupin* aus den Normalen einer Schar von Parallelflächen, Antikaustiken genannt.

Zieht man, wie dies im folgenden geschieht, auch mehrmalige Spiegelung an Φ in Betracht, so hat man demgemäß primäre, sekundäre, tertiäre, ... Spiegelbilder, Spiegelstrahlen usw. zu unterscheiden. Abb. 1 veranschaulicht die Entstehung des sekundären Spiegelbildes Q^{**} eines Punktes Q.

2. Die primäre Spiegelstrahlkongruenz des elliptischen Paraboloides bei achsenparalleler Blickrichtung.

Wir legen unseren Betrachtungen das elliptische Paraboloid Φ

$$\Phi \ldots z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} \quad a > b > 0 \qquad \begin{matrix}(x, y, z \text{ kartesische} \\ \text{Normalkoordinaten})\end{matrix} \qquad (1)$$

zugrunde. Das Auge liege im Fernpunkt Z_u der z-Achse, die Blickrichtung weise in die Höhlung des Paraboloides. Als Bildebene π verwenden wir die Koordinatenebene $z = 0$, die Φ im Scheitel und Ursprung O berührt; die Normalprojektion auf die Bildebene wird Grundriß genannt und wie üblich durch einen Akzent gekennzeichnet.

Die parallelen Ebenen $x = \text{const}$ schneiden Φ nach untereinander kongruenten Parabeln vom Parameter b; das Paraboloid kann daher als Schiebfläche erzeugt werden, indem eine dieser Parabeln mit ihrem Scheitel längs der Hauptparabel $y = 0$ vom Parameter a verschoben wird. Ersetzen wir letztere durch eine sie im Punkt (X_1) berührende achsenparallele Parabel vom Parameter b, so erhalten wir durch die Schiebung ein Drehparaboloid Φ_1, das Φ längs einer Schiebparabel eingeschrieben ist. Die in deren Ebene ξ_1 $(x = x_1)$ verlaufenden Sehstrahlen werden mithin an Φ wie an Φ_1 zum Brennpunkt X_1 von Φ_1 reflektiert. Nach Abb. 2 ergibt sich X_1 aus dem Brennpunkt A der Hauptparabel $y = 0$ — von *Staude* „Hauptbrennpunkt" genannt — durch die Streckung $b:a$ von (X_1) aus, demnach aus (X_1) durch Anwendung der Streckung $(a-b):a$ von A aus. Als Ort aller Brennpunkte

X_1 finden wir damit eine Parabel mit dem Brennpunkt A und dem Parameter $a—b$, also die Fokalparabel e

$$e \ldots x^2 = 2\,(a—b)\,(z - \frac{b}{2}),\ y = 0. \tag{2}$$

Sie wird mithin von allen Spiegelstrahlen getroffen; aus Gründen der Gleichberechtigung schneiden diese aber auch die zweite Fokalparabel f

$$f \ldots y^2 = 2(b—a)\,(z - \frac{a}{2}),\ x = 0, \tag{3}$$

zu der man in analoger Weise gelangt, wenn man von der Ebenenschar $y = \text{const}$ ausgeht. Man kann aber auch die Projektion der Schiebparabel $[\xi_1\ \Phi]$ aus dem zugehörigen Brennzentrum X_1 auf die Hauptebene $x = 0$ aufsuchen und sich an Hand von Abb. 2 überzeugen,

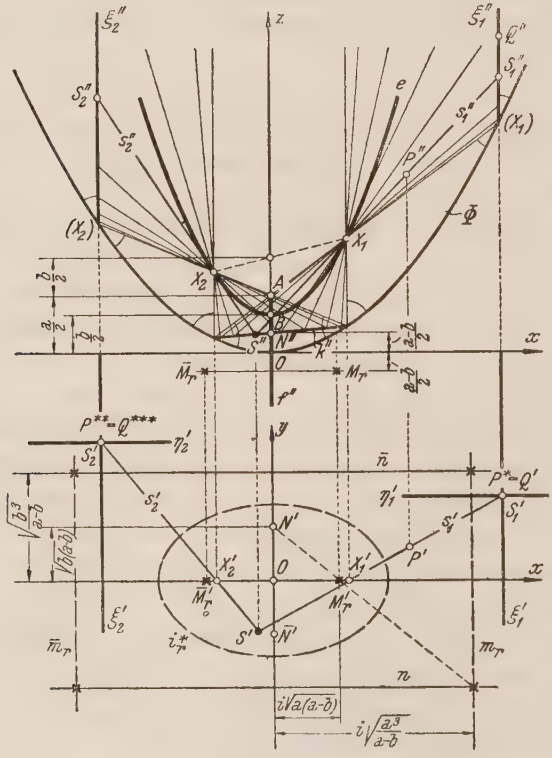


Abb. 2. Strahlengang in Grund- und Aufriß.

daß das Ergebnis f unabhängig von ξ_1 ausfällt. — Die beiden Fokalparabeln sind bekanntlich kongruent und der Scheitel der einen fällt mit dem Brennpunkt der anderen zusammen.

Wir haben also zunächst festgestellt, daß die primäre Spiegelstrahlkongruenz aus den Treffgeraden der beiden Fokalparabeln e und f des spiegelnden Paraboloides besteht.[8] Ihr Bündelgrad ist 3, ihr Feldgrad 4. Die in ihr enthaltenen ∞^1 Torsen sind die Verbindungskegel von e mit den Punkten von f und umgekehrt; sie sind zufolge einer bekannten Eigenschaft von Fokalkegelschnitten Drehkegel.

Damit läßt sich auch die Frage nach der Schar der Antikaustiken leicht beantworten: Die Normalen einer Fläche lassen sich zu Torsen nur längs der Krümmungslinien zusammenfassen; diese ergeben sich bei uns in den Orthogonaltrajektorien der Kegelerzeugenden als Kreise, den Grenzfall der Gerade mitinbegriffen. Die Antikaustiken sind dann aber *Dupin*sche Zykliden, und da sie sich ins Unendliche erstrecken, insonderheit parabolische, also von der dritten Ordnung[10].

Satz 1. Die primäre Spiegelstrahlkongruenz des elliptischen Paraboloides wird bei achsenparalleler Blickrichtung von den Treffgeraden der beiden Fokalparabeln gebildet. Die Parallelschar der Antikaustiken besteht aus parabolischen Dupinschen Zykliden.

3. Die sekundäre und tertiäre Spiegelstrahlkongruenz.

Nach dieser elementaren Einführung betrachten wir unsere Spiegelung einmal vom Standpunkt der Fokaltheorie der Flächen zweiten Grades aus.

Die von dem Paraboloid Φ und dem absoluten Kugelkreis aufgespannte Schar konfokaler Flächen zweiter Klasse enthält auch die beiden Brennparabeln e und f, sowie den absoluten Kugelkreis als ausgeartete Mitglieder. Die aus einem Raumpunkt S an die Flächen legbaren Berührungskegel zweiter Klasse sind ebenfalls konfokal und daher auch koachsial. Liegt S auf Φ, so ist die Flächennormale n daselbst eine der gemeinsamen Kegelhauptachsen und die vier Schnitterzeugenden der Scharkegel $[Se]$ und $[Sf]$ liegen paarweise symmetrisch zu ihr, gehen also durch Spiegelung an Φ ineinander über. Unter diesen Erzeugenden befindet sich der Sehstrahl $p = [SZ_u]$, der mithin in eine Treffgerade s von e und f gespiegelt wird, was wir bereits wissen. Die beiden restlichen Erzeugenden s_1, s_2 sind aber auch Spiegelstrahlen,

---

[10] Enz. math. Wiss. III D 5, Nr. 11. — *V. u. K. Kommerell*, Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen, II. Bd. (Samml. Schubert 44); 2. Aufl. (1911), S. 34f.

denn sie schneiden e und f im Endlichen, und daß auch diese durch Reflexion auseinander hervorgehen, ist neu. Wir schließen daraus:

Satz 2. Die sekundäre Spiegelstrahlkongruenz des elliptischen Paraboloides fällt bei achsenparalleler Blickrichtung mit der primären zusammen.

Die beiden Schnittpunkte eines Spiegelstrahls s mit dem Paraboloid Φ können wir offenbar nicht als gleichberechtigt ansehen. Wir wollen daher jenen Punkt, in dem s durch Spiegelung aus einem Sehstrahl hervorgeht, den „ordentlichen" Spiegelpunkt von s nennen; der andere Schnittpunkt, wo die Reflexion wieder einen Spiegelstrahl liefert, soll „außerordentlich" heißen. Zwei durch Spiegelung ineinander übergehende Spiegelstrahlen sollen „verbunden" genannt werden.

Die zwei vorhin betrachteten verbundenen Spiegelstrahlen s_1, s_2 mit dem gemeinsamen außerordentlichen Spiegelpunkt S werden in ihren ordentlichen Schnittpunkten mit Φ beide als Sehstrahlen reflektiert. Daraus folgt eine überraschende, bisher anscheinend nicht bemerkte Tatsache:

Satz 3. Ein parallel zur Achse eines spiegelnden elliptischen Paraboloides einfallender Lichtstrahl, der in keiner Hauptebene liegt, tritt nach dreimaliger Reflexion wieder parallel zur Achse aus.

Die tertiäre Spiegelstrahlkongruenz des elliptischen Paraboloides fällt bei achsenparalleler Blickrichtung mit dem Sehstrahlbündel zusammen.

Achsenparallele Lichtstrahlen in einer Hauptebene kehren bereits nach zweimaliger Reflexion parallel zurück, ebenso beim Drehparaboloid[9].

Nach Satz 3 gibt es in unserem Fall also keine Spiegelbilder von höherer als dritter Ordnung. — Da durch einen allgemeinen Raumpunkt P drei Spiegelstrahlen gehen, hat dieser drei primäre Spiegelbilder, die sich durch Bestimmung der ordentlichen Spiegelpunkte ermitteln lassen, ferner drei sekundäre, die sich auf dem Weg über die außerordentlichen Spiegelpunkte ergeben, und ein tertiäres. Liegt P im Innern von Φ und in keiner Hauptebene, so treten diese sieben Spiegelbilder vollzählig auf (vgl. Satz 6 und 14, ferner Abb. 7).

Zur Konstruktion der drei durch P gehenden Spiegelstrahlen hat man die beiden Verbindungskegel $[Pe]$ und $[Pf]$ zu verschneiden. Dies kann zeichnerisch dadurch geschehen, daß man die Brennparabel f aus P auf die Hauptebene $y = 0$ projiziert und hier die so gewonnene Hyperbel f^c mit e zum Schnitt bringt; die drei von Z_u verschiedenen Schnittpunkte sind Spurpunkte der gesuchten Spiegelstrahlen. Wie man

die zugehörigen ordentlichen und außerordentlichen Spiegelpunkte am bequemsten findet, geht aus den beiden folgenden Abschnitten hervor.

4. Pseudonormalismus und Doppellot.

Wie wir zu Beginn des vorigen Abschnittes erkannt haben, bilden die von einem Oberflächenpunkt S ausgehenden drei Spiegelstrahlen s, s_1, s_2 zusammen mit dem Sehstrahl p Paare von Gegenerzeugenden auf den zwei konfokalen Kegeln $[Se]$ und $[Sf]$. Der konfokalen Kegelschar gehört als ausgeartetes Mitglied auch das Paar der (konjugiert-komplexen) Flächenerzeugenden d, $\bar{d}$ durch S an. Es gibt mithin aus Symmetriegründen einen Kegel zweiten Grades Σ, der sowohl unsere vier Strahlen als auch das Erzeugendenpaar enthält. Die Ebenen durch die Flächennormale n schneiden Σ nach Gegenerzeugenden, d. h. nach Paaren einer Involution mit den Doppelstrahlen d, $\bar{d}$; dieser Involution gehören insbesondere die beiden verbundenen Spiegelstrahlen s_1, s_2 an. Projektion aus dem auf Σ gelegenen Auge Z_u führt auf eine entsprechende Strahleninvolution im Grundriß und s_1', s_2' liegen demzufolge harmonisch zu d', $\bar{d}'$.

Fassen wir nun die auf der Ferngerade u der Bildebene π liegenden konjugiert-komplexen Punkte D, $\bar{D}$ $(x:y:z = \sqrt{a}:\pm i\sqrt{b}:0)$ des Paraboloides Φ als die absoluten Punkte einer pseudo-euklidischen Metrik auf, so sind d' und $\bar{d}'$ als Pseudo-Minimalgeraden anzusehen und wir können sagen:

Satz 4. Die Grundrisse verbundener Spiegelstrahlen sind pseudonormal[11].

Nunmehr wollen wir den Zusammenhang zwischen einem Spiegelstrahl s und seinem ordentlichen Spiegelpunkt S etwas näher beleuchten. Sind X und Y die Punkte, in denen s die Brennparabeln e und f trifft, so gilt — wie man durch Betrachtung des Aufrisses in Abb. 2 für den Spiegelstrahl s_1 sofort bestätigt

$$SX : SY = b : a. \tag{4}$$

Da dieses Teilverhältnis bei jeder Parallelprojektion erhalten bleibt, gibt es eine einfache und sichere Vorschrift zur (linearen) Konstruktion von S bei gegebenem s.

Trotzdem wollen wir uns für den Grundriß noch eine eigene Konstruktion zurechtlegen. Da sich die Reflexion Sehstrahl — Spiegelstrahl

---

[11] In den Abbildungen wird der euklidische rechte Winkel wie üblich durch einen kleinen Viertelkreis mit eingesetztem Punkt gekennzeichnet, der pseudo-euklidische hingegen durch eine Viertelellipse mit zwei Punkten.

in einer achsenparallelen Ebene abspielt, deckt sich s' mit dem Grundriß der Flächennormale in S, erscheint somit als Normale des Grundrisses jener „Schichtenellipse" l, in der das Paraboloid von der durch S gehenden Parallelebene zu π geschnitten wird (Abb. 3a). Die

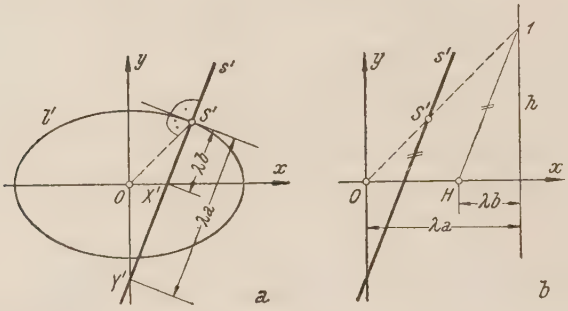


Abb. 3. Zusammenhang zwischen Spiegelstrahl s und ordentlichem Spiegelpunkt S.

Ellipsentangente in S' und der Halbmesser OS' sind konjugiert zu l', also pseudonormal. Wir wollen OS' das „Doppellot" des Spiegelstrahlgrundrisses s' nennen, denn wir erhalten es, wenn wir auf s' zuerst das gewöhnliche Lot und auf dieses das Pseudolot fällen (die Reihenfolge ist wesentlich!).

Satz 5. Fällt man auf den Grundriß eines Spiegelstrahles das Doppellot aus O, so stellt dessen Fußpunkt den Grundriß des zugehörigen ordentlichen Spiegelpunktes dar.

Der Zusammenhang zwischen s' und S' ist nun gut zu übersehen, da es sich um eine Art von Fußpunktsverwandtschaft handelt; die Richtungen von Gerade und zugehörigem Doppellot sind ja projektiv, die Transformation $\mathfrak{D} = s' \rightarrow S'$ demnach birational-quadratisch. Das Hauptdreieck wird von x, y und u aufgespannt. — Abb. 3b stellt eine Zeichenvorschrift für $\mathfrak{D}$ dar, deren Richtigkeit auf Grund von (4) elementar einzusehen ist: Man ziehe durch den fest gewählten Punkt H auf x oder y die Parallele zu s' bis zum Schnitt 1 mit der festen Achse $h \parallel y$ bzw. x ($Oh:Hh = a:b$ bzw. $b:a$); $O1$ ist das Doppellot und schneidet s' in S'.

5. Die quadratische Verwandtschaft $\mathfrak{D}$.

Kehren wir nochmals zu Abb. 2 zurück. Die in der Ebene ξ_1 ($x = x_1$) — nach *Horninger*[8] als „Kernebene" zu bezeichnen — einfallenden Sehstrahlen werden nach § 2 in Form eines Drehkegels nach X_1 auf der

Brennparabel e reflektiert. Dieser Kegel $[X_1 f]$ schneidet das Paraboloid Φ außer in der Kernparabel $[\xi_1 \Phi]$ noch nach einer Ellipse k, die die endlichen Schnittpunkte von f und Φ, d. h. die reellen Nabelpunkte N, $\overline{N}$ enthält; X_1 befindet sich senkrecht über einem Hauptachsenendpunkt von k. Zu derselben Ellipse muß man offenbar auch gelangen, wenn man von einer zweiten Kernebene ξ_2 $(x = x_2)$ ausgeht, deren Sehstrahlen nach jenem Punkt X_2 auf e reflektiert werden, der senkrecht über dem anderen Achsenendpunkt von k liegt. Die beiden Drehkegel $[X_1 k]$ und $[X_2 k]$ bestehen aus Spiegelstrahlen, die auf k gemeinsame außerordentliche Spiegelpunkte besitzen, mithin durch Spiegelung längs k ineinander übergehen.

Die Kegelspitzen X_1 und X_2 bilden auf der Parabel e eine Involution, deren Doppelpunkte die auf e gelegenen (konjugiert-komplexen) Nabelpunkte M, $\overline{M}$ sind; denn der von einem Nabelpunkt ausgehende Drehkegel von Spiegelstrahlen geht auf Grund der Fokaltheorie durch Reflexion an Φ in sich selbst über. — Wir vermerken bei dieser Gelegenheit die Koordinaten der Nabelpunkte

$$M, \overline{M} \left(\pm i\sqrt{a\,(a-b)},\ 0,\ -\frac{a-b}{2}\right) \tag{5}$$

$$N, \overline{N} \left(0,\ \pm\sqrt{b\,(a-b)},\ \frac{a-b}{2}\right).$$

Die zu X_1 und X_2 gehörigen Kernebenen ξ_1 und ξ_2 entsprechen einander ebenfalls in einer quadratischen Involution. Wie aus Abb. 2 leicht abzulesen ist, hat X_2 die Abszisse $-a^2/x_1$, ξ_2 mithin die Abszisse $x_2 = -a^3/(a-b)\,x_1$. Entsprechend ergibt sich für zwei zusammengehörige Ebenen η_1 $(y = y_1)$ und η_2 $(y = y_2)$ des anderen Kernebenenbüschels die Beziehung $y_2 = b^3/(a-b)\,y_1$. — Doppelebenen sind die den Nabelpunkten zugeordneten Ebenen

$$\mu, \bar{\mu} \ldots x = \pm ai\sqrt{a/(a-b)} \tag{6}$$

$$\nu, \bar{\nu} \ldots y = \mp b\sqrt{b/(a-b)}.$$

Der Sehstrahl $p_1 = [\xi_1 \eta_1]$ geht nun nach dreimaliger Reflexion (über S_1, s_1, S, s_2, S_2) in den Sehstrahl $p_2 = [\xi_2 \eta_2]$ über (vgl. Satz 3) und hängt mit diesem durch die involutorische birationale quadratische Verwandtschaft $\mathfrak{Q}$

$$\mathfrak{Q} \ldots x_1 \cdot x_2 = -\frac{a^3}{a-b},\ y_1 \cdot y_2 = \frac{b^3}{a-b} \tag{7}$$

zusammen. — Greifen wir auf dem Spiegelstrahl s_1 einen beliebigen Punkt P im Innern von Φ heraus, so liefert der Sehstrahl p_1 in seinem Spurpunkt ein primäres Spiegelbild P^*, ebenso p_2 ein sekundäres Spiegelbild P^{**}. Ein innerhalb Φ gelegener Punkt Q von p_1 hat sein tertiäres Spiegelbild Q^{***} im Spurpunkt von p_2.

Satz 6. Die drei primären und die drei sekundären Spiegelbilder eines allgemeinen Raumpunktes gehen durch die involutorische birationalquadratische Verwandtschaft $\mathfrak{Q}$ ineinander über. Dieselbe Verwandtschaft führt das tertiäre Spiegelbild aus dem Grundriß hervor.

Das Hauptdreieck der ebenen Punktverwandtschaft $\mathfrak{Q}$ in der Bildebene π wird von den Koordinatenachsen x, y und der Ferngeraden u gebildet. Doppelgeraden sind die Spuren m, $\bar{m}$, n, $\bar{n}$ der Ebenen μ, $\bar{\mu}$, ν, $\bar{\nu}$ (6) und die Diagonalen des von ihnen aufgespannten Rechteckes; reell sind nur n und $\bar{n}$. Die (imaginären) Ecken des Rechteckes geben die Fixpunkte von $\mathfrak{Q}$ ab. — $\mathfrak{Q}$ kann als „Verwandtschaft doppelt konjugierter Punkte" bezüglich zweier beliebiger Kegelschnitte gelten, die die vier Fixpunkte enthalten; denn ein Paar entsprechender Punkte wird von den zerfallenden Kegelschnitten $m + \bar{m}$ und $n + \bar{n}$ harmonisch getrennt und dies trifft dann auch für alle übrigen Kegelschnitte des dadurch bestimmten Büschels zu.

6. Die Zentralellipse.

Im Hinblick auf spätere Erfordernisse wollen wir zunächst die Frage beantworten, für welche Spiegelstrahlen ordentlicher und außerordentlicher Spiegelpunkt zusammenfallen, mit anderen Worten die das Paraboloid Φ berührenden Spiegelstrahlen aufsuchen.

Berührt ein Strahl s drei Flächen einer Schar — und das ist bei uns der Fall, da die Begegnung mit den Brennparabeln e und f als Berührung ausgearteter Klassenflächen zu werten ist — dann berührt er alle Scharflächen und ist eine Erzeugende der Torse vierter Klasse Θ, der sie eingeschrieben sind. In unserem besonderen Fall der konfokalen Flächenschar ist Θ die Φ angeschriebene Minimaltorse, deren Erzeugenden sämtlich den absoluten Kugelkreis i treffen. Ihre Berührungskurve i_s mit Φ — der Ort zusammenfallender ordentlicher und außerordentlicher Spiegelpunkte — kann als Reflex des absoluten Kugelkreises angesehen werden; i_s ergibt sich als Schnitt von Φ mit dem Polarzylinder Ω von i: Es ist eine imaginäre rationale Quartik mit einem Doppelpunkt in Z_u (weil Φ die Fernebene berührt). Sie ist übrigens als spezielle Isophote in jedem Isophotensystem von Φ enthalten.

Der Grundriß $i_s' = i^*$ — das primäre Spiegelbild des absoluten Kugelkreises i — ist als Normalschnitt des Zylinders Ω eine nullteilige Ellipse. Zu ihren Scheiteln kann man über die Berührungspunkte der an die Hauptparabeln von Φ legbaren Minimaltangenten gelangen; da letztere durch die Hauptbrennpunkte A bzw. B gehen, ergeben sich die Halbachsen von i^* sofort zu ai bzw. bi:

$$i^* \ldots \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0. \tag{8}$$

Diese Ellipse, die im folgenden eine wichtige Rolle spielen wird, soll „Zentralellipse" genannt werden. Sie wird in den Abbildungen durch ihren reellen Vertreter i_r^* (mit den Halbachsen a und b) repräsentiert.

Sei S ein Punkt von i_s und s der zugehörige Minimalspiegelstrahl. Die Tangente t der Quartik i_s ist konjugiert zu s, im Grundriß daher pseudonormal zu s'. Der Grundriß des mit s verbundenen Spiegelstrahls $\bar{s}$ ist nach Satz 4 aber ebenfalls pseudonormal zu s', fällt daher mit t' zusammen. Alle Spiegelstrahlen $\bar{s}$ berühren demnach den Zylinder Ω längs i_s und erfüllen eine rationale Regelfläche $\overline{\Theta}$ mit den Fokalparabeln als Doppelkurven; sie ist von achter Ordnung.

Die vier Minimalerzeugenden des Paraboloids Φ gehören sowohl der Torse Θ wie der Regelfläche $\overline{\Theta}$ an. Sie schneiden einander auf den Brennparabeln, und zwar in den Nabelpunkten M, $\overline{M}$ und N, $\overline{N}$ (5). Da sie sich in der Polarität von Φ selbst entsprechen, berühren sie den Zylinder Ω und somit auch die Quartik i_s. Die Grundrisse der Berührungspunkte fallen mit den Fixpunkten der quadratischen Verwandtschaft $\mathfrak{Q}$ zusammen (§ 5). Davon kann man sich im einzelnen folgendermaßen überzeugen: Die von einem Punkt X der Fokalparabel ausgehenden ∞^1 Spiegelstrahlen haben ihre ordentlichen Spiegelpunkte in der zugeordneten Kernebene $\xi \perp x$. Lassen wir nun X gegen den Nabelpunkt M bzw. $\overline{M}$ rücken, so strebt ξ gegen μ bzw. $\bar{\mu}$ (6). Die betrachteten Berührungspunkte gehören also den Ebenen μ, $\bar{\mu}$ und auf Grund einer analogen Überlegung auch ν, $\bar{\nu}$ an. Da die Spuren m, $\overline{m}$, n, $\bar{n}$ der Ebenen aber Doppelgeraden von $\mathfrak{Q}$ sind (§ 5), ist die Behauptung erwiesen.

Abb. 4 zeigt schematisch die im Grundriß herrschenden Verhältnisse. Beachten wir überdies, daß die Minimalerzeugenden (wie alle Erzeugenden des Paraboloids) im Grundriß als Pseudominimalgeraden erscheinen (§ 4), dann können wir die Nabelpunktgrundrisse M', $\overline{M}'$, N', $\overline{N}'$ als „Pseudobrennpunkte" und die Spuren m, $\overline{m}$, n, $\bar{n}$ als

zugehörige „Pseudoleitlinien" der Zentralellipse i^* bezeichnen. — Wir fassen die wesentlichen Ergebnisse dieses Abschnittes nochmals zusammen:

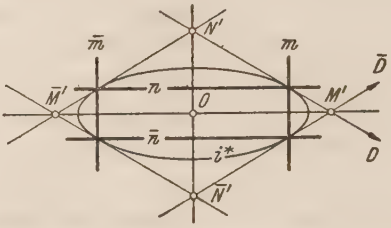


Abb. 4. Anordnungsschema der Nabelpunkte und ihrer Kernebenen.

Satz 7. Die Spiegelstrahlen mit zusammenfallenden ordentlichen und außerordentlichen Spiegelpunkten sind die Erzeugenden der dem Paraboloid Φ umschriebenen Minimaltorse vierter Klasse Θ. Deren Berührungskurve, gleichzeitig der Ort der zusammengefallenen Spiegelpunkte ist eine imaginäre rationale Quartik i_3, die als Reflex des absoluten Kugelkreises i aufgefaßt werden kann. Ihr Grundriß, das primäre Spiegelbild i^* von i, ist die nullteilige „Zentralellipse" (8).

Die verbundenen Spiegelstrahlen berühren den über der Zentralellipse errichteten achsenparallelen Zylinder längs $\imath_3$ und erfüllen eine windschiefe Regelfläche achter Ordnung $\bar{\Theta}$, die die Brennparabeln zu Doppelkurven besitzt.

Die Grundrisse der Nabelpunkte von Φ fallen in die Pseudobrennpunkte der Zentralellipse; deren Pseudoleitlinien sind Doppelgeraden der quadratischen Verwandtschaft $\mathfrak{Q}$.

Nach der Schlußbemerkung von § 5 sind entsprechende Punkte von $\mathfrak{Q}$ konjugiert bezüglich der Zentralellipse, weil diese dem von den Doppelgeraden aufgespannten Kegelschnittsbüschel angehört.

7. Die Spiegelbilder einer allgemeinen Geraden.

Um den Reflex einer allgemeinen Geraden g des Raumes zu konstruieren, kann man mit *Horninger*[8] auf einer der Fokalparabeln — etwa e — einen Punkt X herausgreifen und in dem Drehkegel der von X ausgehenden Spiegelstrahlen jene beiden aufsuchen, die g treffen. Ihre ordentlichen Spiegelpunkte liegen in der X zugeordneten Kernebene ξ und in der Verbindungsebene $\gamma = [Xg]$, also auf der Schnittgeraden $[\xi\,\gamma] = r$. Durchläuft nun X die Brennparabel e, so beschreibt r ein kubisches Konoid Ψ mit g als einfacher Leitgeraden und $x = 0$

als Richtebene, da die Büschel der Ebenen ξ und γ in einer (2,1)-Korrespondenz stehen. Der gesuchte Reflex g_s ist als Durchdringungskurve von Ψ mit dem Paraboloid Φ eine Raumkurve sechster Ordnung mit einem dreifachen Punkt in $Z_u{}^8$. Das primäre Spiegelbild $g^* = g_s{}'$ ist daher eine ebene Kurve dritter Ordnung.

Uns steht jedoch auch noch ein einfacheres Verfahren zur Verfügung, das das Spiegelbild unmittelbar liefert. Wir legen durch g eine Hilfsebene γ und bestimmen die vier in ihr liegenden Spiegelstrahlen dadurch, daß wir γ unter Verwendung der Spuren c_2 $(y = 0)$ und c_3 $(x = 0)$ mit den Brennparabeln e und f zum Schnitt bringen (Abb. 5).

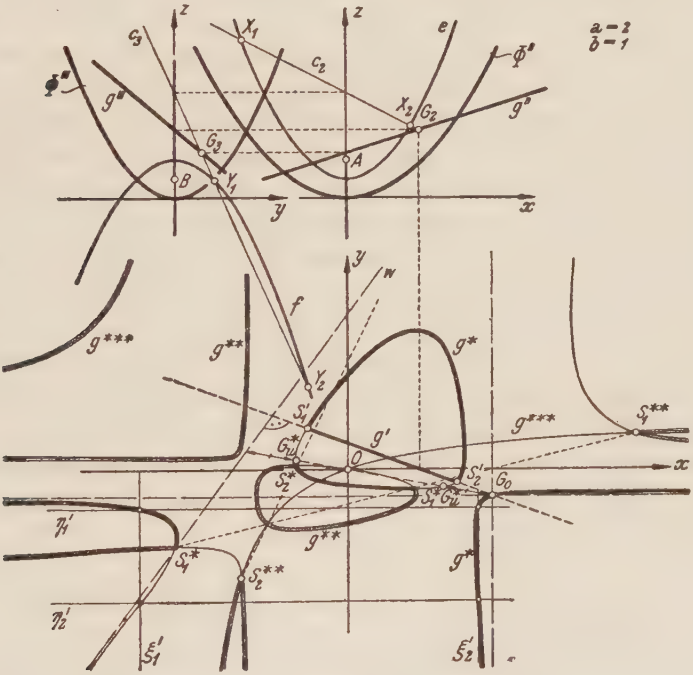


Abb. 5. Spiegelbilder einer Geraden g.

Die so gewonnenen Schnittpunkte X_1, X_2 und Y_1, Y_2 legen die vier Spiegelstrahlen fest. Dieselben brauchen jedoch gar nicht gezeichnet zu werden, denn ihre ordentlichen Spiegelpunkte liegen in den zugeordneten Kernebenen ξ_1, ξ_2 und η_1, η_2 (§ 2). Im Grundriß erhalten wir damit auf einmal vier Punkte des Spiegelbildes in den Ecken des achsenparallelen Rechteckes ξ_1', η_1', ξ_2', η_2'.

Beschreibt nun γ das Büschel g, dann drehen sich die Spuren c_2, c_3 um die Spurpunkte G_2, G_3 von g und die Punktepaare X_1, X_2 und Y_1, Y_2 durchlaufen zwei Involutionen, die projektiv aufeinander bezogen sind. Auch die Rechteckseiten ξ_1', ξ_2' und η_1', η_2' sind mithin Paare zweier projektiver Strahleninvolutionen mit den Fernscheiteln Y_u bzw. X_u; der Verbindungsstrahl $[X_u\ Y_u] = u$ entspricht sich selbst. Nach *Schröter*[12] heißen solche Involutionen „in halbperspektiver Lage"; sie erzeugen (unter Abspaltung von u) eine elliptische Kubik durch die Scheitel X_u und Y_u — das Spiegelbild g^* von g.

Lassen wir γ insbesondere die achsenparallele Lage $\gamma_0 \parallel z$ annehmen, so rücken zwei Rechteckseiten ins Unendliche und die beiden anderen werden die Asymptoten parallel zu x bzw. y. Ihr Schnittpunkt G_0 liegt auf g^* und ist der Grundriß des ordentlichen Spiegelpunktes des einzigen eigentlichen Spiegelstrahles in γ_0; er ergibt sich nach Satz 5 als Fußpunkt des Doppellotes auf g' und wird gelegentlich das „Zentrum" der Kubik genannt. Hinsichtlich der Konstruktion der dritten Asymptote siehe § 13. — Die e bzw. f berührenden Lagen von γ führen auf die zu x bzw. y parallelen Tangenten des Spiegelbildes.

Die Gegeneckenpaare unseres veränderlichen Rechteckes durchlaufen eines der drei Systeme „konjugierter Punkte", die auf jeder allgemeinen Kubik vorhanden sind; konjugiert heißen dabei zwei Kurvenpunkte, wenn sich ihre Tangenten auf der Kurve schneiden[12]. Unsere Kubik g^* weist konjugierte Fernpunkte auf, kann mithin als Seitenstück der sogenannten Fokale[13] angesehen werden.

Schließlich vermerken wir ohne Beweis die Gleichung unserer Kubik; sind g_{ik} die Strahlkoordinaten der gespiegelten Gerade g, so lautet sie

$$g^* \dots g_{01} \cdot y \left(\frac{x^2\,(a-b)}{a^2\,b} + 1\right) + g_{02} \cdot x \left(\frac{y^2\,(a-b)}{a\,b^2} + 1\right) - \quad (9)$$

$$-g_{03} \cdot \frac{2\,x\,y\,(a-b)}{a\,b} - g_{23} \cdot \frac{2x}{a} - g_{31} \cdot \frac{2y}{b} - g_{12}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Das sekundäre Spiegelbild g^{**} von g ergibt sich nach Satz 6 durch Anwendung der quadratischen Verwandtschaft $\mathfrak{Q}$ (7) auf die

[12] *H. Schröter*, Über eine besondere Curve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Curve dritter Ordnung. Math. Ann. **5** (1872).

[13] Die Fokale ist eine zirkulare Kubik, die ihren außerordentlichen Brennpunkt enthält. Sie tritt als Ort der Brennpunkte einer Schar von Kegelschnitten auf und spielt als „Kreispunktkurve" in der ebenen Kinematik eine Rolle.

Kubik g^*. Da letztere die Hauptpunkte X_u und Y_u enthält, wird sie i. a. in eine elliptische Quartik mit Doppelpunkten in X_u und Y_u übergeführt. Gleichzeitig wird die Grundrißgerade g' in eine gleichseitige Hyperbel durch X_u, Y_u und O verwandelt, die das tertiäre Spiegelbild g^{***} darstellt. — In Abb. 5 wurden jene Teile der Kurven hervorgehoben, die dem innerhalb des Paraboloides liegenden Abschnitt von g entsprechen.

Satz 8. Das primäre Spiegelbild einer Geraden allgemeiner Lage ist eine elliptische Kubik durch X_u und Y_u, die den Schnittpunkt ihrer achsenparallelen Asymptoten enthält; derselbe ist der Fußpunkt des aus O auf den Grundriß der Geraden gefällten Doppellotes. Das sekundäre Spiegelbild ist eine elliptische Quartik durch O mit Doppelpunkten in X_u und Y_u, das tertiäre eine gleichseitige Hyperbel durch X_u, Y_u und O.

8. Die Spiegelbilder besonderer Geraden.

Um den im vorigen Abschnitt gebrauchten Begriff der „allgemeinen Lage" einer Geraden g genauer festzulegen, müssen wir uns etwas mit einigen Sonderfällen und Ausartungen befassen. Die im folgenden angeführten Lagen sollen außer den angegebenen Besonderheiten keine weiteren aufweisen. Drei besonders wichtigen Arten mit interessanten Eigenschaften, nämlich den Sehstrahlen, den Spiegelstrahlen und den Ferngeraden sind eigene Abschnitte gewidmet.

a) Gerade parallel zu einer Hauptebene.

Ein Spurpunkt von g ist uneigentlich und die zugehörige Kernebeneninvolution ist symmetrisch. g^* weist daher eine zu g' senkrechte Symmetrieachse auf und sendet in deren Richtung einen parabolischen Ast ins Unendliche. Das tertiäre Spiegelbild ist eine zu g' parallele Gerade.

b) Treffgerade der Achse z.

Das Zentrum G_0 fällt mit dem Ursprung O zusammen. g^* besitzt die x- und y-Achse zu Asymptoten und geht durch O. Das sekundäre Spiegelbild ist eine Kubik derselben Art, das tertiäre eine Gerade durch O.

c) Treffgerade einer Brennparabel.

g habe etwa mit e den Punkt X gemein. Dann spaltet sich vom Reflex die X zugeordnete Kernparabel in der Ebene ξ ab und g^* zerfällt in eine zu y parallele Gerade und einen Kegelschnitt durch X_u. g^{**} zerfällt ebenfalls in eine Gerade parallel zu y und eine rationale Kubik durch Y_u mit einem Doppelpunkt in X_u.

d) Gerade in einer Hauptebene.

g hat mit einer Brennparabel zwei Punkte gemein, sodaß sich nun vom Reflex zwei Kernschnitte in parallelen Ebenen abspalten. g^* zerfällt in g' und zwei dazu senkrechte Geraden.

e) Fokalachse.

Wir stellen zunächst die Frage, ob das primäre Spiegelbild einer Geraden auch eine rationale Kubik werden kann? Soll das der Fall sein, so muß g^* eine Singularität aufweisen und dies tritt dann ein, wenn einer Doppelebene der einen Kernebeneninvolution wieder eine Doppelebene in der anderen entspricht (§ 7). Es muß dann im Büschel $g(\gamma)$ eine Ebene enthalten sein, die beide Brennparabeln berührt: g ist eine Tangente der Minimaltorse Θ (§ 6).

Es ist klar, daß das Spiegelbild einer Doppeltangente von Θ infolge von zwei auftretenden singulären Punkten zerfallen muß[8]. Die Bestimmung dieser Doppeltangenten (die im Gegensatz zu den einfachen Tangenten auch reell ausfallen können) gelingt mit Hilfe der Fokaltheorie: Man erhält die durch einen gegebenen Raumpunkt P gehenden Doppeltangenten im Schnitt der vier an das Paraboloid Φ legbaren isotropen Tangentialebenen, also in den sechs Fokalstrahlen des Tangentenkegels von Φ; diese fallen mit den durch P gehenden Erzeugendenpaaren jener drei zu Φ konfokalen Flächen zweiten Grades zusammen, die P enthalten. Die Kongruenz dieser „Fokalachsen" (nach *Reye*) besteht daher aus den ∞^2 Erzeugenden der ∞^1 Flächen der über Φ errichteten konfokalen Schar; sie hat den Bündelgrad 6 und den Feldgrad 2.

Den Anlaß zum Zerfallen des Spiegelbildes einer Fokalachse g geben die beiden g treffenden Erzeugenden von Θ. Nach § 6 sind ihre ordentlichen Spiegelpunkte die Berührpunkte mit Φ und liegen auf der absoluten Isophote i_s; als Berührpunkte der durch g gehenden Minimalebenen liegen sie auch auf der reziproken Polare $\bar{g}$ von g. Ein Bestandteil der zerfallenden Kubik g^* ist mithin die Gerade $\bar{g}'$, nach § 4 pseudonormal zu g'; als Rest bleibt eine gleichseitige Hyperbel durch X_u und Y_u, deren Mittelpunkt G_0 laut Satz 8 in den Schnitt von $\bar{g}'$ und g' fällt und der Fußpunkt des Doppellotes auf g' ist.

Satz 9. Das primäre Spiegelbild einer Fokalachse g des Paraboloides Φ zerfällt in eine gleichseitige Hyperbel durch X_u und Y_u, deren Mitte der Fußpunkt des auf g' gefällten Doppellotes ist, und ihren zu g' pseudonormalen Durchmesser; dieser deckt sich mit dem Grundriß der reziproken

Polare von g und seine Endpunkte gehören der Zentralellipse an. Das sekundäre Spiegelbild zerfällt in zwei gleichseitige Hyperbeln durch X_u und Y_u.

9. Die Spiegelbilder eines Sehstrahls.

Geht man, um das primäre Spiegelbild eines achsenparallelen Strahles (Sehstrahles) p zu konstruieren, nach dem allgemeinen Verfahren vor, das in § 7 auseinandergesetzt wurde, so arten zwar beide Kernebeneninvolutionen aus, da jedes Kernebenenpaar die Fernebene als festen Bestandteil enthält, doch entsprechen einander die veränderlichen Bestandteile in projektiver Weise, sodaß man für p^* i. a. eine gleichseitige Hyperbel durch X_u, Y_u und O erhält, wenn man von der Ferngeraden u als trivialem Bestandteil der vollständigen Kubik absieht. Zu ihren Asymptoten gelangt man über die zu den Hauptebenen parallelen Lagen der Hilfsebene γ durch p; hat p die Koordinaten (x_0, y_0), so ist $(\frac{a}{a-b} \cdot x_0, \frac{b}{b-a} \cdot y_0)$ die Hyperbelmitte (Abb. 6).

Eine andere Möglichkeit ist folgende: Bedenken wir, daß die Grundrisse aller p treffenden Spiegelstrahlen das Büschel p' bilden und suchen wir nach Satz 5 die Grundrisse der ordentlichen Spiegelpunkte mit Hilfe der Doppellote aus O auf, so ergibt sich die Hyperbel p^* als Doppellotfußpunktskurve des Strahlbüschels p'.

Zum sekundären Spiegelbild gelangen wir durch Ausübung der quadratischen Verwandtschaft Ω auf p^*. Da p^* durch die Ecken des Hauptdreiecks geht, erhalten wir für p^{**} eine Gerade. Es zeigt sich, daß diese die Polare des Punktes p' bezüglich der Zentralellipse i^* ist: Wir legen aus p die Tangentialebenen an den Zylinder $\Omega = [Z_u\, i^*]$; zufolge § 6 berühren die beiden in ihnen gelegenen Spiegelstrahlen $\bar{s}$ den Zylinder Ω in zwei Punkten von i_s, ihren außerordentlichen Spiegelpunkten S. Die verbundenen Spiegelstrahlen s sind Minimalstrahlen, deren ordentliche Spiegelpunkte mit S zusammenfallen; diese Punkte sind daher sekundäre Reflexe der Punkte $[p\bar{s}]$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Satz 10. Das primäre Spiegelbild eines Sehstrahles allgemeiner Lage ist eine gleichseitige Hyperbel durch X_u, Y_u und O, die Doppellotfußpunktskurve des Sehstrahlgrundrisses.

Das sekundäre Spiegelbild ist die Polare des Sehstrahlgrundrisses bezüglich der Zentralellipse.

Das tertiäre Spiegelbild ist natürlich der Punkt $\Omega \cdot p'$.

10. Die Spiegelbilder eines Spiegelstrahls.

Wir betrachten nunmehr einen Spiegelstrahl s allgemeiner Lage; sein ordentlicher Spiegelpunkt sei S. Er trifft die Brennparabeln in je einem Punkt X bzw. Y, was zur Folge hat, daß das primäre Spiegelbild in die Spuren der zugeordneten, durch S gehenden Kernebenen ξ und η und eine weitere Gerade s^* zerfällt (Abb. 6). Um nähere Aussagen über letztere zu gewinnen, ziehen wir auch den Sehstrahl p durch S heran, und ebenso jene beiden verbundenen Spiegelstrahlen s_1, s_2, die in S ihren außerordentlichen Spiegelpunkt besitzen. Ihre ordentlichen Spiegelpunkte S_1, S_2 können gleichzeitig als primäre und sekundäre Reflexe des Punktes S aufgefaßt werden, je nachdem auf welchem der beiden Strahlen s_1, s_2 wir uns ihn liegend denken. Da S aber auch dem Sehstrahl p angehört, sind S_1' und S_2' die Schnittpunkte von p^* und p^{**} (Hyperbel und Gerade, Satz 10) und $s^* = [S_1' S_2']$ fällt mit p^{**} zusammen. Anwendung von $\mathfrak{Q}$ liefert $s^{**} = p^*$.

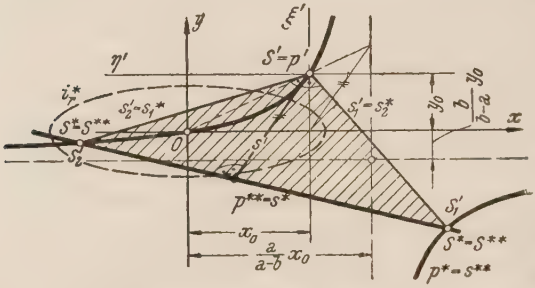


Abb. 6. Spiegelung eines Sehstrahls p und eines Spiegelstrahls s.

Satz 11. Das primäre (sekundäre) Spiegelbild eines Spiegelstrahls fällt mit dem sekundären (primären) Spiegelbild des Sehstrahls durch seinen ordentlichen Spiegelpunkt zusammen (vgl. hiezu Satz 10).

Zufolge Satz 10 ist also s^* die Polare von S' bezüglich der Zentralellipse i^*. Auf Grund von § 5 entsprechen einander S_1' und S_2' in der quadratischen Verwandtschaft $\mathfrak{Q}$ und sind nach der Schlußbemerkung von § 6 konjugierte Punkte von i^*. Daraus folgt: S' S_1' S_2' ist ein Poldreieck der Zentralellipse.

Wenden wir nun die Sätze 11 und 10 auf den Spiegelstrahl s_1 an, so finden wir $s_1^* = s_2'$. In Worten:

Satz 12. Das primäre Spiegelbild eines Spiegelstrahls fällt mit dem Grundriß des verbundenen Spiegelstrahls zusammen.

Und mit Rücksicht auf Satz 4:

Satz 13. Die Grundrisse verbundener Spiegelstrahlen entsprechen einander in der involutorischen quadratischen Verwandtschaft der pseudonormal-konjugierten Geraden der Zentralellipse.

Um den außerordentlichen Spiegelpunkt eines Spiegelstrahls s im Grundriß zu konstruieren, hat man demnach s' mit der hierzu pseudonormal-konjugierten Geraden $\bar{s}' = s^*$ zu schneiden (Abb. 6).

11. Anordnung der Spiegelbilder eines Raumpunktes.

Wir fassen einen allgemeinen, im Inneren des Paraboloides Φ gelegenen Punkt P ins Auge. Die durch ihn gehenden drei Spiegelstrahlen s_1, s_2, s_3 führen über ihre ordentlichen Spiegelpunkte S_1, S_2, S_3 auf die drei primären Spiegelbilder P^*. Diese liegen natürlich auf dem Spiegelbild des durch P laufenden Sehstrahls p, der gleichseitigen Hyperbel p^* (Satz 10). Das Spiegelbild von s_1 zerfällt nach § 10 in die x- und y-Parallele durch S_1' und in die Polare s_1^* von S_1' bezüglich i^*; letztere trägt die Spiegelbilder S_2' und S_3'. Aus den entsprechenden Beziehungen für s_2 und s_3 folgt, daß die drei Punkte $S_i' = P^*$ ein Poldreieck der Zentralellipse aufspannen (Abb. 7).

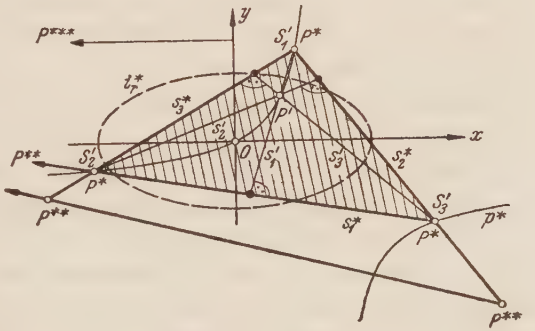


Abb. 7. Anordnung der 7 Spiegelbilder eines Punktes.

Da auf Grund der Sätze 12 und 13 jeweils s_i' pseudonormal zu s_i^* ist, kann P' als Pseudohöhenschnittpunkt des Poldreiecks angesehen werden.

Die Seite s_i^* fällt mit dem Grundriß des mit s_i verbundenen Spiegelstrahls zusammen, enthält daher auch das sekundäre Spiegelbild $P^{**} = \mathfrak{Q} \cdot S_i'$; dasselbe ist der Pol der Pseudohöhe s_i'. Alle drei sekundären Spiegelbilder von P liegen (samt dem tertiären) auf der Polare p^{**} von P' und bilden zusammen mit den drei primären die Ecken eines vollständigen Vierseits. — Wir fassen zusammen:

Satz 14. Die drei primären Spiegelbilder eines allgemeinen Raumpunktes P bilden ein der Doppellotfußpunktshyperbel von P' eingeschriebenes Poldreieck der Zentralellipse. P' ist der Pseudohöhenschnittpunkt dieses Dreiecks.

Die Polare von P' bezüglich der Zentralellipse schneidet auf den Dreieckseiten die drei sekundären Spiegelbilder aus und geht überdies durch das tertiäre. Die sekundären Spiegelbilder sind polar zu den Pseudohöhen und bilden zusammen mit den primären die Ecken eines vollständigen Vierseits (Abb. 7).

Umgekehrt kann zu jedem der ∞^3 Poldreiecke der Zentralellipse i. a. ein Raumpunkt P gefunden werden, dessen primäre Spiegelbilder in die Ecken des Dreiecks fallen. Man kann ja ein Spiegelbild P^* sicher frei annehmen; die beiden übrigen liegen dann auf der Polare bezüglich i^* und werden hier durch die Doppellotfußpunktshyperbel p^* von P' ausgeschnitten. Diese ist dem Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten P^*, O, X_u, Y_u entnommen und schneidet je nach der Wahl des Punktes P auf dem durch P^* festgelegten Spiegelstrahl jedes gewünschte konjugierte Punktepaar auf der genannten Polaren aus. — Eine Sonderstellung nehmen jene Poldreiecke ein, die eine Ecke in einem Hauptpunkt von $\mathfrak{Q}$ haben. Für jedes Poldreieck mit der Ecke X_u oder Y_u ergeben sich ∞^1 Raumpunkte P auf einem Spiegelstrahl in einer Hauptebene. Jedes Poldreieck mit der Ecke O muß hingegen als Spiegelbild des Auges Z_u aufgefaßt werden.

Es sei noch bemerkt, daß die Tangentialebenen des Paraboloides in den drei Reflexen eines Punktes ein orthogonales Dreikant bilden, denn letztere sind paarweise konjugiert bezüglich des Zylinders Ω (§ 6), erstere demnach bezüglich des absoluten Kugelkreises i, d. h. sie sind paarweise normal.

12. Spiegelung der Fernebene.

Wir betrachten nun einen Fernpunkt $P_u \neq Z_u$. Sein Grundriß P_u' ist auch ein uneigentlicher Punkt, sodaß seine Doppellotfußpunktslinie in die Fernachse u und eine Gerade p_u^* durch O zerfällt; diese ist als endliches Spiegelbild des uneigentlichen Sehstrahles $p_u = [Z_u P_u]$ anzusehen.

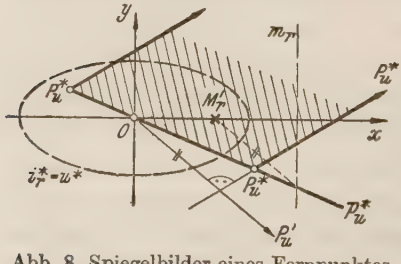


Abb. 8. Spiegelbilder eines Fernpunktes.

Auf p_u^* liegt sicher wenigstens ein primäres Spiegelbild von P_u; die beiden übrigen werden dann auf Grund von Satz 14 von seiner Polare bezüglich i^* auf p_u^* und u ausgeschnitten (Abb. 8). Wir sehen also, daß von den drei Spiegelbildern P_u^* eines unendlich fern ist, während die beiden anderen auf dem dazu polaren Durchmesser der Zentralellipse konjugierte Punkte

bilden. Soll P_u' der Pseudohöhenschnittpunkt des ausgearteten Poldreiecks sein, dann müssen dessen Parallelseiten pseudonormal zur Richtung P_u' verlaufen.

Satz 15. Von den drei primären Spiegelbildern eines allgemeinen Fernpunktes P_u fällt eines in der zu P_u' pseudonormalen Richtung ins Unendliche, während die beiden anderen affin-invers[14] *bezüglich der Zentralellipse liegen.*

Für einen Punkt der Fernachse u liegen die beiden endlichen Spiegelbilder symmetrisch zu O, kommen mithin auf den reellen Vertreter i_r^* der Zentralellipse zu liegen:

Satz 16. Das primäre Spiegelbild der Ferngeraden u der achsennormalen Stellung zerfällt in u und die reelle Vertreterellipse

$$u^* = i_r^* \ldots \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$

Wir wenden uns nunmehr dem primären Spiegelbild einer allgemeinen Ferngeraden g_u zu. Es zerfällt offenbar in die Fernachse u und einen Kegelschnitt g_u^*, der nach Satz 15 durch die affine Inversion $\mathfrak{J}$ der Zentralellipse in sich selbst übergehen muß (er ist wie das Spiegelbild jeder Fernlinie „affin-anallagmatisch"); g_u^* enthält somit die Fernpunkte von i^* als uneigentliche Hauptpunkte von $\mathfrak{J}$, ist also eine zu i_r^* ähnliche und ähnlich gelegene Ellipse.

Satz 17. Die nicht durch das Auge gehenden Ferngeraden haben als (eigentliche) primäre Spiegelbilder Ellipsen, die zur Ellipse $i_r^* = u^*$ (10) ähnlich sind und ähnlich liegen und dieselbe in Gegenpunkten schneiden.

Die genannten Gegenpunkte sind nämlich die eigentlichen Spiegelbilder des Punktes $U = [ug_u]$.

Zur konstruktiven Behandlung kann man sich eines „Nebenauges" C (0, 0, c) auf der z-Achse bedienen, um zunächst einmal auf π ein greifbares Zentralbild g_u^c von g_u zu entwerfen. Die Achsenabschnitte von g_u^c auf x und y seien mit v und w bezeichnet (Abb. 9).

Die mittels des Ebenenbüschels $g_u(\gamma)$ nach § 7 gewonnenen Kernebeneninvolutionen sind beide symmetrisch (vgl. § 8a); die die

[14] Unter einer „affinen Inversion" verstehen wir eine involutorische quadratische Punktverwandtschaft, die aus einer gewöhnlichen Inversion durch Transformation mittels einer Affinität entsteht. Es ist in der Ebene die Verwandtschaft der durch die Durchmesser geordneten konjugierten Punkte eines Mittelpunktskegelschnittes.

Brennparabeln e und f berührenden Lagen von γ führen dabei auf die Hauptachsen der Ellipse g_u^*. Die Koordinaten ihres Mittelpunktes G ergeben sich danach aus elementaren Beziehungen (Ähnlichkeit der geschrafften Dreiecke in Abb. 9) mit $-ac/v$ und $-bc/w$. — Die Aufgabe, um G eine zu u^* ähnliche und ähnlich gelegene Ellipse zu schlagen, die überdies nach Gegenpunkten schneidet, führen wir mittels der Ordinatenstreckung $a:b$ auf die entsprechende Aufgabe für Kreise zurück. G geht dabei in den Punkt G_1 $(-ac/v, -ac/w)$ über. Man erkennt, daß es zweckmäßig ist, die Augdistanz c gleich a zu wählen, denn dann ist G_1 einfach der Antipol von g_u^c bezüglich des großen Scheitelkreises von u^*, und jener Kreis um G_1, der den Scheitelkreis nach Gegenpunkten schneidet, entspricht g_u^c in einer (speziellen) Darbouxschen Verwandtschaft.[9] Die Ordinatenverkürzung $b:a$ verwandelt ihn schließlich in die gesuchte Ellipse g_u^* (Abb. 9).

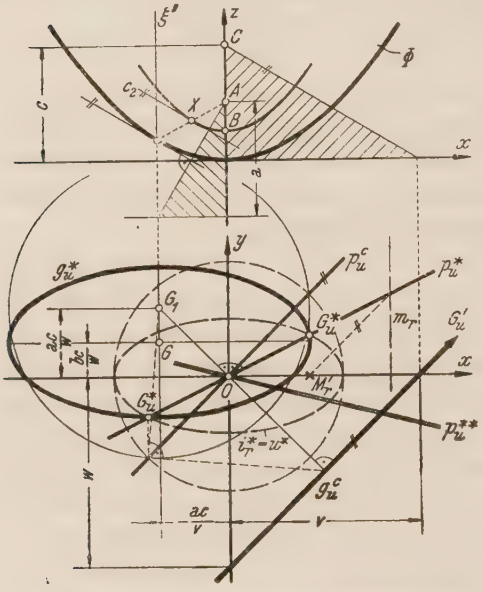


Abb. 9. Spiegelung einer Ferngeraden.

Nebenbei bemerkt, ist G auch der Spurpunkt des zu g_u polaren Durchmessers von Φ.

Satz 18. Die einzweideutige quadratische Verwandtschaft zwischen dem Feld der Fernebene und seinem primären Spiegelbild kann folgendermaßen hergestellt werden: Zentralriß aus dem Achsenpunkt C (0, 0, a) auf die Grundebene π ($z = 0$), Darboux-Transformation über dem nullteiligen Grundkreis i^c ($x^2 + y^2 + a^2 = 0$), Verkürzung $b:a$ der Ordinaten.

Das sekundäre Spiegelbild einer allgemeinen Ferngeraden ist eine rationale Quartik mit Doppelpunkten in O, X_u und Y_u, die durch Ausübung der quadratischen Transformation $\mathfrak{Q}$ aus der Ellipse g_u^* hervorgeht.

Der Vollständigkeit halber seien noch ausdrücklich die besonderen Fernstrahlen p_u durch Z_u erwähnt. Ihre eigentlichen primären und sekundären Spiegelbilder sind die Strahlen des Büschels O. p_u^* ist das Doppellot auf p_u^c, p_u^{**} der zu p_u^c konjugierte Durchmesser der Zentralellipse (Abb. 9).

Ein vollkommener Zerfall des Spiegelbildes tritt übrigens auch für die Tangenten des absoluten Kugelkreises i ein.

13. Tangenten- und Asymptotenkonstruktion.

Gegeben sei eine Linie k und ein Spiegelbild P_0^* eines ihrer Punkte P_0. Gesucht ist die Tangente an das Spiegelbild k^* in P_0^*.

Wir denken uns zu dem Spiegelstrahl s_0 durch P_0 einen endlich benachbarten s durch den veränderlichen Kurvenpunkt P. Jede s_0 und s treffende Gerade h wird dann ein Spiegelbild besitzen, das mit k^* die Punkte P_0^* und P^* gemein hat. Lassen wir nun P nach P_0 rücken, so strebt die Gesamtheit der Hilfsgeraden h gegen ein parabolisches Strahlnetz $\mathfrak{S}$; die Spiegelbilder aller ∞^2 Netzstrahlen berühren k^* in P_0^*. — Meist wird es bequem sein, für h einen Strahl des von s_0 und der Kurventangente t_0 aufgespannten, in $\mathfrak{S}$ enthaltenen Büschels zu nehmen. Unter diesen wiederum bieten sich bei uns jene beiden von s_0 verschiedenen dar, die eine der Brennparabeln treffen, da sie gemäß § 8c im Spiegel als Kegelschnitte erscheinen. Damit ist für die Tangentenkonstruktion im Fall des spiegelnden Paraboloides ein grundsätzlicher Weg aufgezeigt.

Als Anwendung wollen wir die dritte Asymptote w des primären Spiegelbildes einer allgemeinen Geraden g ermitteln (vgl. § 7). Es handelt sich dabei um die Tangente im uneigentlichen Spiegelbild des Fernpunktes G_u von g. Die Richtung G_u^* ist nach Satz 15 pseudonormal zum Geradengrundriß g', der zugehörige Spiegelstrahl ist $[Z_u\, G_u]$. Nach der eben entwickelten Vorschrift bedienen wir uns eines zu g parallelen Hilfsstrahles h, dessen Grundriß sich mit g' deckt und der eine der Fokalparabeln schneidet. Sein Spiegelbild zerfällt in eine der beiden achsenparallelen Asymptoten durch das „Zentrum" G_0 (§ 7 u. 8c) und eine Hyperbel, die die beiden restlichen Asymptoten mit g^* gemein hat. Da sie überdies durch die zwei endlichen Spiegelbildpunkte G_u^* gehen muß, ergibt sich mit Benützung einer bekannten Hyperbeleigenschaft folgende einfache Konstruktion für die dritte Asymptote w (Abb. 5): *Man trage auf dem Doppellot von g' den einen Abschnitt $G_0\, G_u^*$ im selben*

Sinn vom zweiten Punkt G_u^* aus auf und ziehe durch den so gewonnenen Punkt die Pseudonormale zu g'.

Bei näherer Betrachtung von Abb. 5 gelangt man zu der Vermutung, daß diese Abschnittsbeziehung auf allen Strahlen durch G_0 vorhanden ist, daß man sich also insbesondere auch des Grundrisses g' und der auf ihm liegenden Spiegelbilder — nämlich der Grundrisse der Durchstoßpunkte S_1, S_2 von g mit Φ — bedienen könnte. Dieser Sachverhalt bestätigt sich in der Tat auf Grund eines allgemeinen Satzes von *Newton*[15], welcher etwa folgendermaßen ausgesprochen werden kann: Schneidet man eine algebraische Kurve n-ter Ordnung samt ihren n Asymptoten durch eine beliebige Gerade, so haben die beiden n-tupel von Schnittpunkten einen gemeinsamen Schwerpunkt.

Daraus fließen nun einige Eigenschaften für die Kubik g^*, die man in Abb. 5 nachprüfen kann: Die zwischen den Asymptoten liegenden Abschnitte der beiden aus G_0 an g^* legbaren Tangenten werden durch die Berührpunkte gehälftet; letztere liegen auf jener Geraden, die aus w durch die zentrische Verkleinerung 1:2 von G_0 aus hervorgeht („Mittellinie"). Die Tangente in G_0 schneidet die Asymptote w in deren Treffpunkt mit g („Hauptpunkt").

14. Verwandtschaft zwischen einem ebenen Feld und seinem Spiegelbild.

Zum Schluß soll noch kurz die Transformation $\mathfrak{T}$ gekennzeichnet werden, die ein ebenes Feld ε allgemeiner Lage mit seinem primären Spiegelbild ε^* in π verknüpft.

Es handelt sich um eine (1,3)-Korrespondenz, weil jeder allgemeine Punkt P von ε drei primäre Spiegelbilder P^* hervorruft und jeder allgemeine Punkt Q^* der Bildebene als Spiegelbild nur eines einzigen Punktes Q in ε erhalten werden kann. Die drei Punkte P^* bilden stets ein Poldreieck der Zentralellipse i^* (Satz 14); zusammengehörige Spiegelbilder eines Punktes können sich demnach nur auf i^* vereinigen und die Zentralellipse stellt damit die Doppelkurve[16] von ε^* dar. Ihr entspricht in ε als Grenzkurve (Verzweigungskurve) die Spur der Minimaltorse Θ (§ 6), eine rationale Sextik.

Unsere Verwandtschaft ist kubisch, denn eine allgemeine Gerade g von ε spiegelt sich als elliptische Kurve dritter Ordnung g^* (Satz 8).

---

[15] *H. Wieleitner*, Algebraische Kurven II (Samml. Göschen 436, Berlin u. Leipzig 1919), S. 32.

[16] Enz. math. Wiss. III C 11, Nr. 92.

Der Gesamtheit aller Geraden von ε entspricht ein Netz von ∞^2 Kubiken mit den sechs Grundpunkten X_u, Y_u, S_1', S_2', S_3', S_4', wobei mit S_i die ordentlichen Spiegelpunkte der vier in ε liegenden Spiegelstrahlen s_i bezeichnet sind. Ein Strahlbüschel wird in ein Büschel von Kurven dritter Ordnung transformiert; die restlichen drei Grundpunkte entstehen in den Spiegelbildern des Büschelscheitels.

Zu einer Geraden h^* der Bildebene gehört eine rationale Kubik h in ε. Diese ist die Spur einer aus Spiegelstrahlen bestehenden kubischen Regelfläche Σ, welche bei der Spiegelung jenes Spiegelstrahls auftritt, dessen verbundener sich im Grundriß mit h^* deckt (Satz 12). Da Σ die Brennparabeln e und f enthält, besitzt das System der ∞^2 Kubiken h die vier festen Grundpunkte $X_{1,\,2} = [e\ \varepsilon]$, $Y_{1,\,2} = [f\ \varepsilon]$, stellt jedoch kein (lineares) Netz dar. Jede Kurve h berührt die Grenzsextik $[\Theta\ \varepsilon]$ an zwei Stellen.

Die Hauptpunkte von ε sind die eben genannten vier Punkte X_1, X_2, Y_1, Y_2; ihnen entsprechen in ε^* als Hauptgeraden die Spuren ξ_1', ξ_2', η_1', η_2' der zugeordneten Kernebenen. Die Schnittpunkte dieses Hauptgeradenvierseits sind die sechs Hauptpunkte X_u, Y_u, S_1', S_2', S_3', S_4' von ε^*; zu ihnen gehören als Hauptgeraden in ε die Seiten $x = 0$, $y = 0$, s_1, s_2, s_3, s_4 des vollständigen Hauptpunktvierecks von ε.

Die eindreideutige Verwandtschaft vierten Grades, die das ebene Feld ε mit seinem sekundären Spiegelbild ε^{**} verknüpft, ist das Produkt aus $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{Q}$ (Satz 6) und soll daher nicht näher besprochen werden. Bemerkenswert ist höchstens, daß die drei Bildpunkte stets auf einer Geraden liegen (Satz 14).

Der Zusammenhang zwischen ε und seinem tertiären Spiegelbild schließlich wird im wesentlichen durch die quadratische Verwandtschaft $\mathfrak{Q}$ beschrieben.

Über die Konstruktion von Systemen orthogonaler Polynome in ein- und zweidimensionalen Bereichen.

Von
Wolfgang Gröbner, Innsbruck.

Mit 1 Abbildung.

(Eingelangt am 24. Mai 1943)

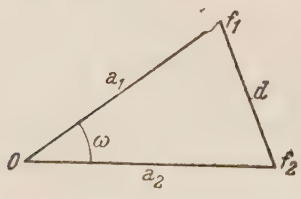
Es wird ein Minimalprinzip aufgestellt, aus dem alle Systeme von orthogonalen Polynomen abgeleitet werden können. Insbesondere werden die Systeme von Polynomen zweier Veränderlichen, welche in einem Dreieck oder in einer Ellipse orthogonal sind, explizit angegeben.

1. Einleitung.

Die Anwendung des Begriffes „orthogonal" auf Funktionen stammt aus dem Gedankenkreis des *Hilbertschen Funktionenraums*. Dort werden die reellen Funktionen, deren Quadrate in einem vorgegebenen Bereich (nach *Lebesgue*) integrierbar sind, als Punkte eines Raumes von unendlich vielen Dimensionen gedeutet. Die Entfernung d zweier Punkte f_1 und f_2 wird durch die Formel

$$d^2 = \int (f_1 - f_2)^2$$

definiert, wo das Integral über den vorgegebenen Bereich zu erstrecken ist. Zwei Funktionen, die sich nur in einer Nullmenge unterscheiden, liefern also denselben Punkt im *Hilbert*schen Funktionenraum.



Wenn wir in dem Dreieck, Abb. 1, dessen Eckpunkte der Ursprung 0 (die Nullfunktion) und die Punkte f_1 und f_2 sind, den Winkel ω, dessen Scheitel im Ursprung liegt, nach dem gewöhnlichen Kosinussatz berechnen, so erhalten wir:

$$\cos\omega = \frac{a_1^2 + a_2^2 - d^2}{2\,a_1\,a_2} = \frac{\int f_1 f_2}{\sqrt{\int f_1^2 \cdot \int f_2^2}}$$

Der Winkel ω ist insbesondere ein rechter Winkel, wenn $\cos \omega = 0$, also

$$\int f_1 f_2 = 0$$

ist; dann heißen die zwei Funktionen f_1 und f_2 „*zueinander orthogonal*" in bezug auf den vorgegebenen Bereich.

Das wichtigste Problem des *Hilbert*schen Funktionenraums ist die Darstellung einer willkürlichen Funktion φ, welche selbst dem Raume angehört, und also im vorgegebenen Bereich quadratisch integrierbar sein muß, durch passende Entwicklungsfunktionen $f_1, f_2, \ldots$, so daß im Sinne mittlerer Konvergenz

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$$

gilt. Die Entwicklungsfunktionen f_n legen die Richtungen der Koordinatenachsen des *Hilbert*schen Raumes fest, die Koeffizienten c_n sind die Koordinaten von φ in bezug auf dieses Koordinatensystem. Das Koordinatensystem heißt vollständig oder abgeschlossen, wenn es den gesamten *Hilbert*schen Raum ausspannt, sodaß jede dazu gehörige Funktion φ in der genannten Weise darstellbar ist.

Wie schon bei Räumen endlicher Dimension alle Formeln einfacher werden, wenn man ein orthogonales Koordinatensystem zugrundelegt, so werden auch im *Hilbert*schen Raum alle Überlegungen leichter und übersichtlicher, wenn sie auf ein System von Entwicklungsfunktionen bezogen werden, die paarweise zueinander orthogonal sind. Daraus folgt das Interesse, das man an der Konstruktion von orthogonalen Funktionensystemen hat.

Ein beliebiges Koordinatensystem kann immer fortschreitend orthogonalisiert werden; aber die Formeln, die sich dabei ergeben, sind außerordentlich schwerfällig. Daher ist man auf andere Verfahren angewiesen, welche unmittelbar orthogonale Funktionensysteme liefern. Die meisten Orthogonalsysteme erhält man als Lösungen der Eigenwertprobleme linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom *Sturm-Liouville*schen Typus. Hier wollen wir jedoch ein anderes Prinzip vorführen, welches direkt darauf hinzielt, die Reihe der Polynome zu orthogonalisieren.

Da nämlich zufolge des in Nr. 2 bewiesenen Hilfssatzes die Funktionen eines Orthogonalsystems durch eine einfache Minimalbedingung charakterisiert werden können, so hat man, um das n^{te} Polynom der Orthogonalreihe zu erhalten, nichts anderes zu tun, als dieses

Minimalproblem mit Hinzufügung einer passenden Nebenbedingung zu lösen, welche sicherstellt, daß als Lösung ein Polynom herauskommt, welches in die n^{te} Stelle der Reihe einzuordnen ist[1].

Bei eindimensionalen Bereichen kann dieses Problem sehr einfach gefaßt werden. Das n^{te} Polynom $P_n(x)$ eines Orthogonalsystems in bezug auf ein Intervall I ist diejenige Funktion, welche das Integral

$$J_n = \int_I P_n^2 \, dx$$

zu einem Minimum macht und der Nebenbedingung

$$P_n^{(n)} = n!$$

genügt. Die Lösung kann, wie in Nr. 3 gezeigt wird, hier leicht mit Hilfe der Variationsrechnung gewonnen werden.

Weniger einfach ist die Fassung der Nebenbedingung bei Polynomen von zwei oder mehr Veränderlichen; hier reicht eine Gleichung überhaupt nicht mehr aus; andererseits kommt es aber darauf an, das Minimalproblem möglichst einfach zu formulieren, damit die Lösung in geschlossener Gestalt angegeben werden kann. Das gelingt auch bei einigen einfachen Bereichen, nämlich beim Dreieck, Parallelogramm und bei der Ellipse, wie in Nr. 5 und 6 vorgeführt wird. Man kann hier das Minimalproblem so gestalten, daß die Lösungen geschlossen angegeben werden können; diese müssen dann allerdings noch einem restlichen Orthogonalisierungsprozeß unterworfen werden, um das gewünschte Orthogonalsystem zu liefern. Das Parallelogramm, bzw. das Rechteck wird hier nicht behandelt, weil die Lösung dort in trivialer Weise durch Zusammensetzung von *Legendre*schen Polynomen gewonnen werden kann, während die Orthogonalsysteme in den beiden andern Fällen wohl noch nicht bekannt sein dürften.

2. Ein Hilfssatz über orthogonale Funktionensysteme.

Wenn man sich die Aufgabe stellt, ein gegebenes Funktionensystem $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ zu orthogonalisieren, so ist der folgende einfache Hilfssatz[2] von Nutzen:

---

[1] Über dieses Verfahren habe ich schon einmal berichtet: Sistemi di polinomi ortogonali soddisfacenti a date condizioni. Sem. Mat. Roma, 3 (4) 1939, p. 29—51. Dort werden aber nur lineare Intervalle behandelt und das Hauptgewicht auf die Hinzufügung von zusätzlichen Randbedingungen gelegt, denen die Polynome des Orthogonalsystems genügen sollen.

[2] Eine ähnliche Minimalbedingung wurde von *G. Szegö* für orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören, angegeben, Math. Ann. 82 (1921) und Math. Zeitschr. 9 (1921).

Hilfssatz: Dafür, daß ein Funktionensystem

(21) $$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

im Intervall $a \leqq x \leqq b$ orthogonal sei, ist notwendig und hinreichend, daß das Integral

$$J_n = \int_a^b [c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_{n-1}\varphi_{n-1} + \varphi_n]^2\, dx \qquad (22)$$

bei jedem Index n sein Minimum für $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$ erreicht.

Hier ist natürlich vorausgesetzt, daß die reellen Funktionen $\varphi_n(x)$ sämtlich im Intervall $a \leqq x \leqq b$ eindeutig definiert und dort sie selbst wie auch ihre Quadrate integrierbar sind, so daß alle vorkommenden Integrale Sinn haben und endliche Werte besitzen.

Setzen wir zum Beweise zunächst voraus, daß das Funktionensystem (21) orthogonal sei, also allgemein die Beziehungen

$$\int_b^a \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ \sigma_n > 0 & \text{für } n = m \end{cases} \qquad (23)$$

erfüllt seien, so gilt offenbar

$$J_n = c_1^2\,\sigma_1 + c_2^2\,\sigma_2 + \ldots + c_{n-1}^2\,\sigma_{n-1} + \sigma_n.$$

Da die σ alle positiv sind, erhält man das Minimum tatsächlich für $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$, wie behauptet wurde. Die Bedingung unseres Hilfssatzes ist also notwendig.

Es sei nun umgekehrt die Voraussetzung erfüllt, daß J_n sein Minimum für $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$ erreiche; dann muß auch das vereinfachte Integral

$$j = \int_a^b [c_m\varphi_m + \varphi_n]^2\, dx \qquad (m < n)$$

sein Minimum für $c_m = 0$ erreichen. Nun aber ist

$$j = c_m^2 \int_a^b \varphi_m^2\, dx + 2\,c_m \int_a^b \varphi_m\varphi_n\, dx + \int_a^b \varphi_n^2\, dx$$

eine quadratische Funktion von c_m, welche ihr Minimum für

$$c_m = -\int_a^b \varphi_m\varphi_n\, dx : \int_a^b \varphi_m^2\, dx$$

erreicht. Daher muß

$$\int_a^b \varphi_m\varphi_n\, dx = 0 \qquad \text{für } m < n$$

sein; da dies für jedes n gilt, folgen unmittelbar die Orthogonalitätsrelationen (23) und der Satz ist vollständig bewiesen.

1. Zusatz. Der Hilfssatz bleibt unverändert gültig, wenn man unter dem Integral eine Gewichtsfunktion $Q(x)$ hinzufügt, welche im Intervall $a \leqq x \leqq b$ nicht negativ, nicht ständig null und integrierbar sein soll. Es tritt dann an Stelle von (22)

$$J_n = \int_a^b Q\,[c_1\varphi_1 + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1} + \varphi_n]^2\,dx \qquad (22^*)$$

und an Stelle von (23)

$$\int_a^b Q\,\varphi_m\varphi_n\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \sigma_n > 0 & \text{für } m = n \end{cases}. \qquad (23^*)$$

Das Hinzufügen einer Gewichtsfunktion ist besonders geboten, wenn das Intervall unendlich ist, weil dann dafür Sorge getragen werden muß, daß alle in Betracht kommenden Integrale konvergieren.

2. Zusatz. Der Hilfssatz kann sinngemäß auf reelle Funktionen von mehreren Veränderlichen und auf nicht komplizierte mehrdimensionale Bereiche ausgedehnt werden. Es sind dann einfach die Integrale in den Formeln (22) und (23) durch entsprechende mehrfache Integrale über die zugrundeliegenden Bereiche zu ersetzen; auch eine passende Gewichtsfunktion Q darf noch hinzugenommen werden.

3. Orthogonale Polynome einer Veränderlichen mit beliebigen homogenen Randbedingungen.

Besonders einfach ist die Anwendung unseres Hilfssatzes auf ein Funktionensystem, das aus Polynomen besteht. Es sollen

$$P_0(x),\ P_1(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ \ldots \qquad (31)$$

eine Reihe von Polynomen der Veränderlichen x bezeichnen, welche zweckmäßig so angeordnet und normiert sein sollen, daß $P_n(x)$ ein Polynom des Grades n mit dem ersten Koeffizienten 1 bedeutet. Wir können das auch sehr einfach analytisch ausdrücken durch die Bedingung

$$\frac{d^n P_n}{dx^n} = n! \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (32)$$

Sollen nun die Polynome der Reihe (31) zueinander orthogonal im Intervall $a \leqq x \leqq b$ sein, so muß nach unserem Hilfssatz $P_n(x)$ eine Funktion sein, welche die Bedingung (32) erfüllt und das Integral

$$J_n = \int_a^b [P_n(x)]^2 \, dx \tag{33}$$

zu einem Minimum macht. Das muß für jeden Index $n = 0, 1, 2, \ldots$ gelten. Um das Polynom $P_n(x)$ zu ermitteln, haben wir also nur das Variationsproblem $J_n = \text{Min!}$ mit der Nebenbedingung (32) zu lösen.

Nach dem von *Euler* und *Lagrange* entwickelten Formalismus der Variationsrechnung haben wir zu diesem Zwecke die Bedingung (32) mit einer willkürlichen Funktion λ_n zu multiplizieren und unter das Integral (33) hineinzunehmen; das gibt

$$\Omega_n = \int_a^b [P_n^2 + \lambda_n (P_n^{(n)} - n!)] \, dx, \tag{34}$$

und es muß die erste Variation $\delta \Omega_n = 0$ gesetzt werden:

$$\delta \Omega_n = \left[\frac{\partial J_n (P_n + \varepsilon \cdot \delta P_n, \lambda_n + \varepsilon \cdot \delta \lambda_n)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon = 0} =$$

$$= \int_a^b [2 P_n \cdot \delta P_n + (P_n^{(n)} - n!) \, \delta \lambda_n + \lambda_n \cdot \delta P_n^{(n)}] \, dx = 0.$$

Beachtet man (32) und integriert in üblicher Weise partiell, um $\delta P_n^{(n)}$ unter dem Integral durch δP_n zu ersetzen, so erhält man:

$$\delta \Omega_n = \int_a^b \left[2 P_n + (-1)^n \lambda_n^{(n)} \right] \delta P_n \cdot dx +$$

$$+ \left[\lambda_n \cdot \delta P_n^{(n-1)} - \lambda'_n \cdot \delta P_n^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1} \lambda_n^{(n-1)} \cdot \delta P_n \right]_{x=a}^{x=b}.$$

Da die Variation $\delta \Omega_n$ für willkürliche Variationen δP_n null sein soll, folgt einerseits die *Euler*sche Differentialgleichung

$$P_n = \frac{1}{2} (-1)^{n-1} \lambda_n^{(n)}, \tag{35}$$

welche mit (32) zusammengefaßt

$$\lambda_n^{(2n)} = 2 (-1)^{n-1} \cdot n! \tag{36}$$

liefert, andererseits folgen für die Endpunkte des Intervalls die Bedingungen

$$\lambda_n = \lambda'_n = \ldots = \lambda_n^{(n-1)} = 0 \text{ für } x = a \text{ und } x = b. \tag{36*}$$

Die Differentialgleichung (36) der Ordnung $2n$ bestimmt zusammen mit den $2n$ Randbedingungen (36*) eindeutig λ_n; die Lösung ist offenbar

$$\lambda_n = 2\,(-1)^{n-1} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!}\,(x-a)^n\,(x-b)^n.$$

Daher erhält man aus (35) die orthogonalen Polynome im Intervall $a \leqq x \leqq b$:

$$P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,[(x-a)^n\,(x-b)^n] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{37}$$

Setzt man hier etwa $a = -1$, $b = +1$, so erhält man — abgesehen von einem konstanten Faktor — die bekannte Formel für die *Legendre*schen Polynome

$$X_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^2-1)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{37*}$$

Denselben Gedankengang kann man dazu verwenden, um im Intervall $a \leqq x \leqq b$ die orthogonalen Polynome zu bestimmen, welche noch zusätzlich gewisse vorgegebene (lineare und homogene) Bedingungen in den Randpunkten des Intervalles erfüllen. Es sei z. B. für die Polynome $P_n(x)$ die Bedingung

$$P_n(a) + P_n(b) = 0 \tag{38}$$

vorgeschrieben. An der obigen Ableitung ändern sich dann nur die Bedingungen (36*); da nämlich jetzt die Variationen δP_n in den Punkten $x = a$ und $x = b$ nicht mehr willkürlich sondern ebenfalls der Bedingung

$$\delta P_n(a) + \delta P_n(b) = 0$$

unterworfen sind, folgt nunmehr aus $\delta\Omega_n = 0$ nur:

$$\begin{cases} \lambda_n = \lambda'_n = \ldots = \lambda_n^{(n-2)} = 0 \text{ für } x = a \text{ und } x = b, \\ \lambda_n^{(n-1)}(a) + \lambda_n^{(n-1)}(b) = 0. \end{cases} \tag{36a}$$

Das sind im ganzen $2n-1$ Bedingungen, wozu noch wegen (35) und (38) die Bedingung

$$\lambda_n^{(n)}(a) + \lambda_n^{(n)}(b) = 0 \tag{36b}$$

hinzugefügt werden muß. Dann aber ist die Lösung der Differentialgleichung (36) wieder eindeutig bestimmt; man sieht leicht, daß sie die Gestalt haben muß:

$$\lambda_n = 2\,(-1)^{n-1} \cdot \frac{n!\,n!}{(2\,n)!}\,(x-a)^{n-1}\,(x-b)^{n-1}\,(x^2 + \gamma_n x + \delta_n),$$

wo γ_n und δ_n noch so zu bestimmen sind, daß die letzte Bedingung (36a) und die Bedingung (36b) erfüllt werden. Man erhält daraus

$$\gamma_n = -(a+b),\ \delta_n = ab - \frac{1+(-1)^n}{2(n-1)}(a-b)^2.$$

Die orthogonalen Polynome im Intervall $a \leqq x \leqq b$, welche die Bedingung (38) erfüllen, lauten also:

(39) $P_n(x) =$

$$= \frac{n!\,n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1}\left[(x-a)(x-b) - \frac{1+(-1)^n}{2(n-1)}(a-b)^2\right]\right\}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Man kann die Beispiele leicht vervielfachen; insbesondere erhält man auf dieselbe Weise, wenn man die Gewichtsfunktion

$$Q(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \qquad (\alpha, \beta > -1)$$

einführt, die *Jacobi*schen Polynome für das zugrunde liegende Intervall, mit der Gewichtsfunktion

$$Q(x) = e^{-x} x^\alpha$$

im Intervall $0 \leqq x < +\infty$ die *Laguerre*schen Polynome, und mit der Gewichtsfunktion

$$Q(x) = e^{-x^2}$$

im Intervall $-\infty < x < +\infty$ die *Hermite*schen Polynome.

4. Orthogonale Polynome von zwei Variablen.

Dasselbe Verfahren ist im Prinzip auch auf zwei oder mehr Veränderliche anwendbar. Der Hilfssatz von Nr. 2 bleibt ja unverändert in Geltung. Aber die Anordnung und Normierung der Polynome von zwei und mehr Veränderlichen ist nicht mehr so einfach wie bei einer Veränderlichen, wo die einzige Gleichung (32) völlig ausreicht. Hat man zwei Veränderliche x und y, so muß man die Polynome zweckmäßig durch zwei Indizes n und α kennzeichnen; es soll das Polynom $P_{n,\alpha}$ ein Polynom des Grades n in x und y sein, welches die Potenzprodukte des Grades n

$$x^n,\ x^{n-1}y,\ x^{n-2}y^2,\ \ldots,\ x^{n-\alpha}y^\alpha$$

und alle Potenzprodukte niedrigeren Grades enthält (eventuell mit verschwindenden Koeffizienten), und zwar das Potenzprodukt $x^{n-\alpha}y^\alpha$ mit einem nicht verschwindenden Koeffizienten, so daß

$$\frac{\partial^n P_{n,a}}{\partial x^{n-a}\,\partial y^a} = 1 \qquad \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \ldots \\ a = 0, 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{41}$$

gilt. Es ist klar, daß diese Normierung (41), welche eine naheliegende Verallgemeinerung der Normierung (32) vorstellt, nicht ausreicht, um das Polynom $P_{n,a}$ zu kennzeichnen; man müßte noch eine Anzahl weiterer Bedingungen hinzufügen, welche aussagen, daß $P_{n,a}$ keine Potenzprodukte $x^{n-\beta}\,y^\beta$ mit $\beta > \alpha$ und keine Potenzprodukte von höherem Grad als n enthalten darf.

Jedoch genügen die Bedingungen (41), um die Polynome des Gesamtgrades n von denjenigen geringereren Grades abzusondern. Demnach ist zu erwarten, daß die Lösung des Minimalproblems

$$J_{n,a} = \int_{\mathfrak{B}} P_{n,a}^2\,dx\,dy = \text{Min!} \tag{42}$$

unter der Nebenbedingung (41) und der stillschweigenden Bedingung, daß $P_{n,a}$ keine Potenzprodukte höheren Grades als n enthalten soll, auf eine Reihe von Polynomen führt, welche nach ihrem Grad geordnet in Gruppen zerfallen, derart, daß zwei Polynome aus verschiedenen Gruppen orthogonal sind in bezug auf den zugrunde liegenden Bereich $\mathfrak{B}$, während dasselbe für zwei Polynome aus derselben Gruppe noch nicht behauptet werden kann.

Die Rechnung ist ähnlich wie im eindimensionalen Fall; — wir haben zunächst mit Hilfe eines *Euler*schen Faktors $\lambda_{n,a}$ das Variationsproblem

$$\Omega_{n,a} = \int_{\mathfrak{B}} \left\{P_{n,a}^2 + \lambda_{n,a}\,[P_{n,a}^{(n-a,\,a)} - 1]\right\} dx\,dy$$

zu bilden[3] und die erste Variation gleich null zu setzen; das gibt mit Berücksichtigung von (41)

$$\delta\Omega_{n,a} = \int_{\mathfrak{B}} \left\{2\,P_{n,a}\cdot\delta P_{n,a} + \lambda_{n,a}\cdot\delta P_{n,a}^{(n-a,\,a)}\right\} dx\,dy = 0.$$

Die gemischten Ableitungen $\delta P_{n,a}^{(n-a,\,a)}$ müssen hier wieder durch partielle Integration entfernt werden. Dabei bleibt es willkürlich, in welcher Reihenfolge man die partiellen Integrationen in bezug auf die Variablen x und y ausführt. Wir wollen voraussetzen, daß unser Bereich

[3] Die in Klammern gesetzten oberen Indizes bedeuten partielle Ableitungen nach x und y, also $P_{n,a}^{(n-a,\,a)} = \dfrac{\partial^n P_{n,a}}{\partial_x{}^{n-a}\,\partial_y{}^a}$.

$\mathfrak{B}$ eine einfache Gestalt[4] habe, so daß wir unbedenklich die gewöhnlichen Formeln für partielle Integration anwenden dürfen; bedeutet (n, x) den Winkel der nach außen gerichteten Normalen der Randkurve C unseres Bereiches $\mathfrak{B}$ mit der positiven Richtung der x-Achse, so gelten die bekannten Formeln:

$$\int_{\mathfrak{B}} u \frac{\partial v}{\partial x} dx\, dy = \int_C u\, v \cos(n, x)\, ds - \int_{\mathfrak{B}} v \frac{\partial u}{\partial x} dx\, dy,$$

$$\int_{\mathfrak{B}} u \frac{\partial v}{\partial y} dx\, dy = \int_C u\, v \sin(n, x)\, ds - \int_{\mathfrak{B}} v \frac{\partial u}{\partial y} dx\, dy.$$

Es wird daher

$$(43) \quad \delta\Omega_{n,a} = \int_{\mathfrak{B}} \left\{2 P_{n,a} + (-1)^n \lambda_{u,a}^{(n-a,a)}\right\} \delta P_{n,a} \cdot dx\, dy +$$

$$+ \int_C \left\{ \cdots \begin{matrix} + (-1)^{\mu+\nu} \lambda^{(\mu,\nu)} \cdot \delta P^{(n-a-\mu-1,\, a-\nu)} \cos(n, x) + \\ + (-1)^{\mu+\nu} \lambda^{(\mu,\nu)} \cdot \delta P_{na}^{(n-a-\mu,\, a-\nu-1)} \sin(n, x) + \end{matrix} \cdots \right\} ds.$$

Das über den Rand C zu erstreckende Integral enthält lauter Glieder der beiden angeschriebenen Arten; man überlegt sich leicht, daß es von der speziellen Reihenfolge der partiellen Integrationen bezüglich x und y abhängt, welche Glieder tatsächlich auftreten, und daß man diese Reihenfolge mit wenigen Ausnahmen immer so wählen kann, daß ein bestimmtes Glied $\lambda_{n,a}^{(\mu,\nu)}$ ($\mu = 0, 1, \ldots, n-a$, $\nu = 0, 1, \ldots, a$) in der oberen oder unteren Gestalt auftritt. Soll nun $\delta\Omega_{n,a}$ bei willkürlichen Variationen $\delta P_{n,a}$ verschwinden, so muß zunächst die *Euler*sche Differentialgleichung

$$2 P_{n,a} + (-1)^n \lambda_{n,a}^{(n-a,a)} = 0$$

erfüllt sein, welche zusammen mit (41) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^{2n} \lambda_{n,a}}{\partial x^{2n-2a}\, \partial y^{2a}} = 2 (-1)^{n-1} \tag{44}$$

liefert. Dazu tritt noch unsere stillschweigende Bedingung, daß $\lambda_{n,a}^{(n-a,a)}$ ein Polynom des Grades n sein soll und die weiteren Bedingungen,

[4] Für die formale Durchführung der Rechnung würde genügen, daß der Bereich $\mathfrak{B}$ durch analytische Kurvenbögen mit endlich vielen Ecken begrenzt ist und daß jede Gerade die Randkurve nur in endlich vielen Punkten trifft. Der oben verwendete Formalismus der Variationsrechnung ist aber nicht so leistungsfähig und führt nur bei wenigen elementaren Bereichen — Dreieck, Parallelogramm, Ellipse — zum Ziel.

welche aus dem Verschwinden des Randintegrals in (43) bei willkürlichen Variationen $\delta P_{n,a}^{(\mu,\nu)}$ folgen, das sind die Bedingungen:

$$\frac{\partial^{\mu+\nu}\,\lambda_{n,a}}{\partial x^{\mu}\,\partial y^{\nu}} = 0 \quad \begin{cases} \text{für } \begin{cases} \mu = 0, 1, \ldots, n-a-1 \\ \nu = 0, 1, \ldots, a-1 \end{cases} & \text{in allen Punkten von } C; \\ \text{für } \begin{cases} \mu = n-a \\ \nu = 0, 1, \ldots, a-1 \end{cases} & \text{in allen Punkten von } C, \text{ wo } \sin(n,x) \neq 0; \\ \text{für } \begin{cases} \mu = 0, 1, \ldots, n-a-1 \\ \nu = a \end{cases} & \text{in allen Punkten von } C, \text{ wo } \cos(n,x) \neq 0. \end{cases} \tag{45}$$

5. Die orthogonalen Polynome in einem Dreieck.

Wir wollen als Bereich $\mathfrak{B}$ das Dreieck in der xy-Ebene mit den Eckpunkten (0, 0), (1, 0), (0, 1) wählen; die Seiten des Dreiecks haben die Gleichungen

$$x = 0,\ y = 0,\ x+y-1 = 0.$$

Wir werden unser Problem sicher gelöst haben, wenn es uns gelingt, $\lambda_{n,a}$ als Polynom in x, y des Grades $2n$ derart zu bestimmen, daß die Bedingungen (44) und (45) erfüllt werden. Wie man leicht nachprüft, leistet der Ausdruck

$$\lambda_{n,a} = x^{n-a}\,y^{a}\,(x+y-1)^{n} \qquad \begin{pmatrix} n = 0, 1, \ldots. \\ a = 0, 1, \ldots n \end{pmatrix} \tag{51}$$

das Verlangte, wenn er noch mit einem passenden numerischen Faktor versehen wird. Das letztere ist aber nicht notwendig, da wir die Normierung (41) leicht abändern und einfach

$$P_{n,a} = \frac{\partial^{n}}{\partial x^{n-a}\,\partial y^{a}}\,[x^{n-a}\,y^{a}\,(x+y-1)^{n}] \qquad \begin{pmatrix} n = 0, 1, \ldots. \\ a = 0, 1, \ldots n \end{pmatrix} \tag{52}$$

festsetzen wollen. Wenn wir die Differentiationen nach der *Leibniz*schen Regel ausführen, oder wenn wir die Klammer entwickeln und gliedweise differenzieren, erhalten wir noch die folgenden Ausdrücke für diese Polynome:

$$P_{n,a} = n!\,a!\,(n-a)!\sum_{\nu=0}^{n-a}\sum_{\mu=0}^{a}\binom{n-a}{\nu}\binom{a}{\mu}\frac{x^{n-a-\nu}\,y^{a-\mu}\,(x+y-1)^{\mu+\nu}}{(n-a-\nu)!\,(a-\mu)!\,(\mu+\nu)!} \tag{52*}$$

$$P_{n,a} = n!\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}(-1)^{n+j+k}\,\frac{(n-a+j)!\,(a+k)!}{(n-j-k)!\,j!\,j!\,k!\,k!}\,x^{j}\,y^{k} \tag{52**}$$

Die ersten Polynome dieser Reihe sind:

$P_{00} = 1$
$P_{10} = 2x+y-1$
$P_{11} = x+2y-1$
$P_{20} = 2\,(6x^2+6xy+y^2-6x-2y+1)$
$P_{21} = 3x^2+8xy+3y^2-4x-4y+1$
$P_{22} = 2\,(x^2+6xy+6y^2-2x-6y+1)$
$P_{30} = 6\,(20x^3+30x^2y+12xy^2+y^3-30x^2-24xy-3y^2+12x+3y-1)$
$P_{31} = 2\,(10x^3+36x^2y+27xy^2+4y^3-18x^2-36xy-9y^2+9x+6y-1)$
$P_{32} = 2\,(4x^3+27x^2y+36xy^2+10y^3-9x^2-36xy-18y^2+6x+9y-1)$
$P_{33} = 6\,(x^3+12x^2y+30xy^2+20y^3-3x^2-24xy-30y^2+3x+12y-1)$

Um nachzuprüfen, inwieweit diese Polynome bereits orthogonal zueinander sind, müssen wir das Integral

$$\int_{\mathfrak{B}} P_{n,\,a}\,P_{m,\,\beta}\,dx\,dy$$

allgemein berechnen; wir setzen hier gemäß (51) und (52)

$$P_{m,\,\beta} = \lambda_{m,\,\beta}^{(m-\beta,\,\beta)}$$

ein und integrieren partiell; das liefert wegen der von $\lambda_{m,\,\beta}$ und seinen Ableitungen erfüllten Randbedingungen

$$\int_{\mathfrak{B}} P_{n,\,a}\;P_{m,\,\beta}\,dx\,dy = \int_{\mathfrak{B}} P_{n,\,a}\,\lambda_{m,\,\beta}^{(m-\beta,\,\beta)}\,dx\,dy = \\ = (-1)^m \int_{\mathfrak{B}} P_{n,\,a}^{(m-\beta,\,\beta)}\,\lambda_{m,\,\beta}\,dx\,dy.$$

Ist nun $m > n$, so ist $P_{n,\,a}^{(m-\beta,\,\beta)} = 0$; das Integral kann also nur dann einen von null verschiedenen Wert aufweisen, wenn $m = n$ ist. Dann gilt

$$\int_{\mathfrak{B}} P_{n,\,a}\,P_{n,\,\beta}\,dx\,dy = (-1)^n \int_{\mathfrak{B}} P_{n,\,a}^{(n-\beta,\,\beta)}\,x^{n-\beta}\,y^{\beta}\,(x+y-1)^n\,dx\,dy.$$

Aus (52**) berechnet man leicht

$$P_{n,\,a}^{(n-\beta,\,\beta)} = \frac{\partial^n P_{n,\,a}}{\partial x^{n-\beta}\,\partial y^{\beta}} = \frac{n!\,(2n-a-\beta)!\,(a+\beta)!}{(n-\beta)!\,\beta!};$$

ferner rechnet man direkt aus:

$$\int_{\mathfrak{B}} x^{n-\beta}\,y^{\beta}\,(x+y-1)^n\,dx\,dy = \int_0^1 x^{n-\beta} \int_0^{1-x} y^{\beta}\;(x+y-1)^n\,dy\,dx = \\ = (-1)^n \frac{(n-\beta)!\;\beta!\;n!}{(2n+2)!}.$$

Also folgt

$$\int_{\mathfrak{B}} P_{n,\alpha} P_{n,\beta}\, dx\, dy = \pi^{(n)}_{\alpha,\beta} = \frac{n!\, n!\, (2n-\alpha-\beta)!\, (\alpha+\beta)!}{(2n+2)!} \qquad (53)$$

$$\left(\begin{matrix} n = 0, 1, \ldots, \\ \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n \end{matrix}\right)$$

Die $n+1$ Polynome eines und desselben Grades n müssen also noch so miteinander kombiniert werden, daß die neu entstehenden Polynome zueinander orthogonal sind; setzt man zu diesem Zweck

$$p_{n,\alpha} = \sum_{j=0}^{\alpha} c^{(n)}_{\alpha,j} P_{n,j},$$

so soll

$$\int_{\mathfrak{B}} p_{n,\alpha} p_{n,\beta}\, dx\, dy = \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\beta} c^{(n)}_{\alpha,j} c^{(n)}_{\beta,k} \pi^{(n)}_{j,k} \begin{cases} = 0 \text{ für } \alpha \neq \beta \\ > 0 \text{ für } \alpha = \beta \end{cases}$$

gelten. Wir müssen also die Halbdiagonalmatrix $C_n = (c^{(n)}_{\alpha,j})$ so bestimmen, daß $C_n\, \Pi_n\, \bar{C}_n$ eine Diagonalmatrix wird, d. h. nur in der Hauptdiagonale nicht verschwindende Elemente besitzt; dabei bedeutet Π_n die (symmetrische) Matrix $(\pi^{(n)}_{j,k})$ und $\bar{C}_n$ die gespiegelte Matrix C_n. Man überzeugt sich leicht, daß es hier darauf ankommt, die Matrix C_n so zu bestimmen, daß in der Produktmatrix $C_n\, \Pi_n$ alle Elemente unter der Hauptdiagonale verschwinden, denn dann gilt dasselbe auch für $C_n\, \Pi_n\, \bar{C}_n$, und da dies eine symmetrische Matrix ist, müssen auch alle Elemente über der Hauptdiagonale verschwinden.

Die Bestimmung von C_n erfolgt am besten schrittweise nach dem gewöhnlichen (*Gauß*schen) Verfahren, das man auch zur Auflösung von Systemen linearer Gleichungen benützt. Die Rechnung ist etwas langwierig, bereitet aber keinerlei prinzipielle Schwierigkeiten; da sie auch kein theoretisches Interesse erwecken kann, darf sie hier übergangen werden. Man findet für die $c^{(n)}_{\alpha,j}$ die einfachen Ausdrücke

$$c^{(n)}_{\alpha,j} = (-1)^{\alpha+j} \binom{\alpha}{j} \binom{2n-\alpha+1}{j}.$$

Demnach erhält man als schließliche Lösung unseres Problems die Polynome

$$P_{n,\alpha} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha+j} \binom{\alpha}{j} \binom{2n-\alpha+1}{j} P_{n,j} \quad \left(\begin{matrix} n = 0, 1, \ldots \\ \alpha = 0, 1, \ldots, n \end{matrix}\right) \qquad (54)$$

Dabei sind die $P_{n,j}$ durch die Formeln (52), (52*) oder (52**) gegeben. Die Polynome $p_{n,\alpha}$ bilden ein vollständiges orthogonales System für den Bereich des Dreiecks mit den Ecken (0, 0), (1, 0), (0, 1), d. h. es ist

$$\int_{\mathfrak{B}} P_{n,\alpha}\, P_{m,\beta}\, dx\, dy = \begin{cases} 0 \text{ wenn } |n-m|+|\alpha-\beta| > 0 \\ \dfrac{1}{(2n+2)\,(2n-2\alpha+1)} \end{cases} \quad \text{für } n = m \text{ und } \alpha = \beta. \quad (55)$$

Die ersten Polynome $p_{n,\alpha}$ sind der Reihe nach:

$$p_{00} = P_{00} = 1$$

$$p_{10} = P_{10} = 2x+y-1$$

$$p_{11} = -P_{10}+2P_{11} = 3y-1$$

$$p_{20} = \frac{1}{2} P_{20} = 6x^2+6xy+y^2-6x-2y+1$$

$$p_{21} = -\frac{1}{2} P_{20}+2P_{21} = 10xy+5y^2-2x-6y+1$$

$$p_{22} = \frac{1}{2} P_{20}-3P_{21}+\frac{3}{2} P_{22} = 10y^2-8y+1$$

$$p_{30} = \frac{1}{6} P_{30} = 20x^3+30x^2y+12xy^2+y^3-30x^2-24xy-3y^2+12x+3y-1$$

$$p_{31} = -\frac{1}{6} P_{30}+P_{31} = 42x^2y+42xy^2+7y^3-6x^2-48xy-15y^2+6x+9y-1$$

$$p_{32} = \frac{1}{6} P_{30}-\frac{5}{3} P_{31}+\frac{5}{3} P_{32} = 42xy^2+21y^3-24xy-33y^2+2x+13y-1$$

$$p_{33} = -\frac{1}{6} P_{30}+2P_{31}-3P_{32}+\frac{2}{3} P_{33} = 35y^3-45y^2+15y-1$$

Wie man hier bemerken kann, erreicht ein Polynom $p_{n,\alpha}$ in x nur den Grad $n-\alpha$, so daß insbesondere die Polynome $p_{n,n}$ nur von y abhängen.

Durch eine passende lineare Substitution (affine Transformation der Ebene

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a_1 + b_1 x + c_1 y \\ \bar{y} &= a_2 + b_2 x + c_2 y \end{aligned} \quad (56)$$

kann das Innere des Dreiecks, von dem wir ausgegangen sind, auf das Innere eines beliebigen Dreiecks der xy-Ebene transformiert werden. Transformiert man daher die Polynome $p_{n,\alpha}$ mittels (56), so erhält man ein vollständiges orthogonales System von Polynomen für das neue Dreieck. Daher ist die gestellte Aufgabe auch für ein allgemeines Dreieck der xy-Ebene vollständig gelöst.

6. Die orthogonalen Polynome in einer Ellipse.

Auf dieselbe Weise kann auch ein System von orthogonalen Polynomen für das Innere einer beliebigen Ellipse der xy-Ebene ermittelt werden. Wenn wir uns eine ganze lineare Transformation (56) vorbehalten, so genügt es, die Aufgabe für das Innere des Kreises

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{61}$$

zu lösen. Hier können nun die Bedingungen (44) und (45), wie man leicht sieht, durch den Ansatz

$$\lambda_{n,a} = (x^2 + y^2 - 1)^n \tag{62}$$

erfüllt werden, wobei ein für das Folgende unwesentlicher numerischer Faktor weggelassen wurde. Dann erhält man zunächst die Polynome[5]

$$P_{n,a} = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^{n-a} \partial y^a} (x^2+y^2-1)^a, \quad \begin{pmatrix} n = 0, 1, \ldots. \\ a = 0, 1, \ldots n \end{pmatrix} \tag{63}$$

welche die verlangten Orthogonalitätsrelationen für den Kreis (61) bereits zum größten Teil erfüllen; nur die einzelnen Gruppen von je $n+1$ Polynomen eines und desselben Grades n müssen jeweils noch für sich orthogonalisiert werden.

Die ersten Polynome $P_{n,a}$ sind:

$$P_{00} = 1$$
$$P_{10} = 2x$$
$$P_{11} = 2y$$
$$P_{20} = 2(3x^2 + y^2 - 1)$$
$$P_{21} = 4xy$$
$$P_{22} = 2(x^2 + 3y^2 - 1).$$
$$P_{30} = 4(5x^3 + 3xy^2 - 3x)$$
$$P_{31} = 4(x^2y + y^3 - y)$$
$$P_{32} = 4(x^3 + 3xy^2 - x)$$
$$P_{33} = 4(3x^2y + 5y^3 - 3y)$$

Um die noch verbleibende Orthogonalisierung durchzuführen, berechnen wir die über das Innere unseres Kreises $\mathfrak{K}$ erstreckten Integrale

$$\int_{\mathfrak{K}} P_{n,a} P_{m,\beta} \, dx\, dy = \frac{1}{m!} \int_{\mathfrak{K}} P_{n,a} \lambda_{m,\beta}^{(m-\beta,\beta)} \, dx\, dy =$$
$$= \frac{(-1)^m}{m!} \int_{\mathfrak{K}} P_{n,a}^{(m-\beta,\beta)} (x^2 + y^2 - 1)^m \, dx\, dy.$$

Aus dieser Formel folgt die Bestätigung dafür, daß zwei Polynome $P_{n,a}$ und $P_{m,\beta}$ zueinander orthogonal sind, wenn sie verschiedene Grade besitzen; denn ist etwa $m > n$, so verschwindet $P_{n,a}^{(m-\beta,\beta)}$ und damit auch das obige Integral. Nur für $m = n$ kann dieses von Null

[5] Diese Polynome sind schon lange bekannt; vgl. *Koschmieder*, Über ein Biorthogonalsystem von Polynomen zweier Veränderlichen, Math. Anm. 91 (1929), S. 62—81; dort auch weitere Literaturangaben.

verschieden sein. In der Tat folgt auf Grund der leicht zu bestätigenden Beziehungen

$$P_{n,\alpha}^{(n-\beta,\beta)} = \frac{1}{n!}\,\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n-\alpha-\beta}\,\partial y^{\alpha+\beta}}\,(x^2+y^2-1)^n = \begin{cases} 0, \text{ wenn } \alpha+\beta \text{ ungerade,} \\ \dfrac{(2n-2v)!\,(2v)!}{(n-v)!\,v!}, \text{ wenn} \\ \alpha+\beta=2v \text{ gerade ist;} \end{cases}$$

$$\int_{\mathfrak{K}} (x^2+y^2-1)^n\,dx\,dy = \int_0^1 (r^2-1)^n\,r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{(-1)^n\,\pi}{n+1};$$

$$\int_{\mathfrak{K}} P_{n,\alpha}\,P_{n,\beta}\,dx\,dy = \begin{cases} 0, \text{ wenn } \alpha+\beta \text{ ungerade,} \\ \dfrac{(2n-2v)!\,(2v)!\,\pi}{(n-v)!\,(v)!\,(n+1)!}, \text{ wenn } \alpha+\beta=2v \text{ gerade ist.} \end{cases} \qquad (64)$$

$$\left(\begin{matrix} n=0,1,\ldots. \\ \alpha,\beta=0,1,\ldots,n \end{matrix}\right)$$

Man kann die aus diesen Zahlen gebildete Matrix genau so wie beim Dreieck behandeln und auf eine Diagonalmatrix zurückführen. Damit ist auch ein System von orthogonalen Polynomen für das Innere des Kreises (61) gewonnen. Diese Polynome sind lineare Aggregate der Polynome (63) und haben die folgenden Ausdrücke[6]:

$$\begin{cases} p_{n,2\alpha} = \sum_{j=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha+j}\binom{\alpha}{j}\,\dfrac{(2\alpha-1)!!\,(2n-2\alpha+1)!!}{(2j-1)!!\,(2n-2\alpha-2j-1)!!}\,P_{n,2j} \\ \qquad\qquad \left(\begin{matrix} n=0,1,\ldots. \\ \alpha=0,1,\ldots,[\frac{n}{2}] \end{matrix}\right) \\ p_{n,2\alpha+1} = \sum_{j+0}^{\alpha} (-1)^{\alpha+j}\binom{\alpha}{j}\,\dfrac{(2\alpha+1)!!\,(2n-2\alpha-1)!!}{(2j+1)!!\,(2n-2\alpha-2j-1)!!}\,P_{n,2j+1} \\ \qquad\qquad \left(\begin{matrix} n=0,1,\ldots. \\ \alpha=0,1,\ldots,[\frac{n-1}{2}] \end{matrix}\right). \end{cases} \qquad (65)$$

Für diese Polynome gelten die folgenden Orthogonalitätsrelationen:

$$\begin{cases} \int_{\mathfrak{K}} p_{n,\alpha}\,p_{m,\beta}\,dx\,dy = 0 \text{ für } |n-m| + |\alpha-\beta| > 0, \\ \int_{\mathfrak{K}} [p_{n,2\alpha}]^2\,dx\,dy = 2^{n+\alpha}\,\dfrac{(2\alpha)!\,(2n-2\alpha+1)!!\,\pi}{(n-\alpha)!\,(2n-4\alpha-1)\,(n+1)}, \ (\alpha=0,1,..,[\tfrac{n}{2}]), \\ \int_{\mathfrak{K}} [p_{n,2\alpha+1}]^2\,dx\,dy = 2^{n+\alpha}\,\dfrac{(2\alpha+1)!\,(2n-2\alpha-1)!!\,\pi}{(n-\alpha)!\,(2n-4\alpha-1)\,(n+1)}, \ \alpha=0,1,..,[\tfrac{n-1}{2}]. \end{cases} \qquad (66)$$

[6] In üblicher Weise bedeutet $(2n+1)!! = 1, 3, 5 \ldots (2n+1) = \dfrac{(2n+1)!}{2^n\,n!}$.

Die ersten Polynome dieser Reihe sind:

$$p_{00} = P_{00} = 1 \qquad p_{30} = P_{30} = 4(5x^3+3xy^2-3x)$$
$$p_{10} = P_{10} = 2x \qquad p_{31} = P_{31} = 4(3x^2y+y^3-y)$$
$$p_{11} = P_{11} = 2y \qquad p_{32} = -P_{30}+5P_{32} = 8(6xy^2-x)$$
$$p_{20} = P_{20} = 2(3x^2+y^2-1) \qquad p_{33} = -3P_{31}+3P_{33} = 24(2y^3-y)$$
$$p_{21} = P_{21} = 4xy$$
$$p_{22} = -P_{20}+3P_{22} = 4(4y^2-1).$$

Mit Hilfe einer geeigneten affinen Transformation (56) kann man diese Polynome auch leicht für eine beliebige Ellipse umrechnen.

Über den Begriff der Wahrscheinlichkeit.

Von
L. Vietoris, Innsbruck.

(Eingelangt erstmals am 23. Oktober 1943 und gesetzt, nach Zerstörung durch Bomben, mit kleinen Änderungen neuerlich eingereicht am 31. Oktober 1946.)

Es ist heute wohl allgemeine Überzeugung, daß man den Begriff der Wahrscheinlichkeit aus mathematischen und logischen Begriffen nicht ganz definieren kann, sondern daß es hiezu noch eines anderen Begriffes bedarf, den man als undefinierten Grundbegriff einführen und durch Axiome näher beschreiben muß. Am nächsten lag es, die Wahrscheinlichkeit selbst als diesen Begriff zu nehmen. Die zugehörigen Axiomensysteme haben aber trotz ihrer Einfachheit den folgenden Nachteil. Wenn ein Axiomensystem einen undefinierten Begriff festlegen soll, ist es eine Art Rätsel, das dem Leser aufgegeben wird. Er soll in seinem Innern einen Begriff finden oder erst bilden, der die Axiome zu unmittelbar einleuchtenden Sätzen macht, wenn man ihn in sie einsetzt. Dazu eignet sich natürlich am besten ein möglichst einfacher Begriff, vor allem einer, den wir in unserem Innern, womöglich im Hausverstand schon haben. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff selbst ist für diesen Zweck zu hoch. Ein Axiomensystem, das ihn festlegt, ist für jeden, der nicht schon weit über den gewöhnlichen Hausverstand hinaus gebildet ist, ein „zu schweres" Rätsel.

Wir tragen in uns einen in dieser Hinsicht sehr günstigen Begriff, den wir mit dem Wort „eher" ausdrücken, etwa in den Sätzen: „Man wirft eher mit einer Münze Adler, als mit einem Würfel 6", „Heute wird es eher schneien, als regnen". Wenn wir noch sagen, daß dieses „eher" nichts mit zeitlicher Aufeinanderfolge zu tun hat, ist er schon so stark angedeutet, daß das Axiomensystem, mit dem wir ihn festigen wollen, ein sehr leichtes Rätsel ist. Außerdem lassen die Axiome an unmittelbarem Einleuchten nichts zu wünschen übrig, wenn man die Lösung in sie einsetzt. Sie lassen nur die gewünschte Deutung des Wortes „eher" zu[1].

[1] Soweit diese Betrachtungen den Begriff „eher als" betreffen, sind sie durch den Bericht angeregt, den *W. Ackermann* im Zentralbl. f. Math. 24 (1941), S. 50, 241, über die Arbeiten von *B. O. Koopman*, The axioms and algebra of

Wir wollen die Wahrscheinlichkeitslehre außerdem auf den Begriff der *Gruppe eines Spiels*[2] stützen, den ich definiere. Er gestattet es, die *Laplace*sche Wahrscheinlichkeitsdefinition in einem eng begrenzten Gebiet wieder aufzunehmen und mit Hilfe des Begriffs „eher als" auf den nötigen Umfang zu erweitern.

A. Merkmale in Spielen.

Wir führen den Eherbegriff nur in dem folgenden eng begrenzten Gebiet ein: Es möge immer eine Vorschrift vorliegen, nach der von endlich vielen einander ausschließenden Merkmalen eines ermittelt wird. Sie mögen zum Unterschied von den später aus ihnen abzuleitenden Merkmalen *Grundmerkmale* heißen. Solche Vorschriften sind die Regeln, nach denen man mit einem Würfel eines der Merkmale 1, 2, ... 6 ermittelt, aus einer Urne Lose zieht, u. dgl. Eine solche Vorschrift liegt aber auch vor, wenn das Geschlecht von Neugeborenen, der Wochentag von Todesfällen u. dgl. bestimmt werden. Wir nennen eine solche Ermittlungsvorschrift, auch wenn sie von sehr ernsten Dingen handelt, eine *Spielregel*, einen ihr genügenden Ermittlungsvorgang einen *Zug* oder *Wurf*; die Gesamtheit aller Züge, die einer Spielregel genügen, heiße ein *Spiel*. Eine Spielregel muß also die endlich

---

intuitive probability, und Intuitive probabilities and sequences, Ann. of Math. 41 (1940), 269—292, und 42 (1941), 169—187, gegeben hat. Die Arbeiten selbst habe ich erst gesehen, als die folgenden Betrachtungen im Wesentlichen fertig waren. *Koopmans* Gedankengang unterscheidet sich von dem hier vorgetragenen hauptsächlich durch Folgendes: *Koopman* erklärt erstens den Begriff „eher als" durch seine Axiome für ein größeres Gebiet und engt ihn erst zum Schluß auf das der Anwendung ein. Zweitens legt er auf eine möglichst genaue Festlegung und eingehende Untersuchung des Eherbegriffs wert. Drittens findet sich bei ihm der Begriff der Gruppe eines Spiels nicht, wodurch er genötigt ist, das Bestehen von Wahrscheinlichkeitsskalen zu fordern. Die folgenden Ausführungen wollen dagegen überflüssige Allgemeinheit von Anfang an vermeiden, den Eherbegriff nur soweit festlegen und behandeln, als für die Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung notwendig ist, und mit Hilfe der Gruppe eines Spiels auf dem Weg über die *Laplace*sche Wahrscheinlichkeitsdefinition auf die Wirklichkeit anwendbar sein. Die Axiome decken sich mit denen *Koopmans* nur soweit, als sie unausweichlich zu sein scheinen und man von dem verschiedenen Geltungsbereich absieht. Sie scheinen mir den Vorteil zu haben, leichter verständlich zu sein und dem, der den richtigen Eherbegriff einsetzt, leichter einzuleuchten, als die *Koopman*schen Axiome. Diesen Vorteil scheinen sie mir auch gegenüber anderen, andere undefinierte Grundbegriffe festlegenden Axiomensystemen zu haben.

[2] Hierüber habe ich auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Würzburg im September 1943 gesprochen. Die Ausdehnung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs mit Hilfe des Eherbegriffs wurde dabei nur angedeutet. Vgl. Jahresber. Deutsch. Math. Ver. 54 (1944).

vielen Grundmerkmale, die nach ihr ermittelt werden können, angeben, den Ermittlungsvorgang genau beschreiben und sagen, wie aus dem Ablauf eines Zuges eines der Grundmerkmale abgelesen werden soll.

Ist A ein Spiel und sind a und b Grundmerkmale in A, dann sagen wir (bei einem Zug von A) trete das (zusammengesetzte) Merkmal $a \vee b$ (gelesen „a oder b") auf, wenn (bei diesem Zug) a auftritt oder b auftritt[3]. Im selben Sinn bilden wir auch aus zusammengesetzten Merkmalen mit dem Zeichen $\vee$ neue zusammengesetzte Merkmale. Natürlich bedeutet $a \vee b$ dasselbe wie $b \vee a$, in Zeichen $a \vee b = b \vee a$[4]. Ebenso gilt $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, so daß wir dafür $a \vee b \vee c$ schreiben dürfen. $a \vee b$ heiße die *Vereinigung* von a und b.

Beispiel: 1, 2, ... 6 sind die Grundmerkmale beim Würfeln. Ist $a = 1 \vee 2 \vee 3, b = 2 \vee 4$, dann ist $a \vee b = 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4$. Können zwei Merkmale eines Spiels zugleich, d. h. beim selben Zug auftreten, dann heißen sie miteinander *verträglich*, sonst sagen wir, sie schließen einander aus.

Wir sagen, ein Merkmal a *bleibe* bei einem Zug *aus*, wenn es bei diesem Zug nicht auftritt. Das Ausbleiben eines Merkmals a von S ist das Auftreten des Merkmals von S, das aus allen mit a unverträglichen Grundmerkmalen von S zusammengesetzt ist. Wir schreiben es $\bar{a}$ und nennen es das zu a in S komplementäre Merkmal. a und $\bar{a}$ sind immer mit einander unverträglich.

Auch $a \vee \bar{a}$ ist nach dem Gesagten ein Merkmal in S, es tritt bei jedem Zug von S auf und heiße das *sichere* Merkmal. Wir bezeichnen es gewöhnlich mit demselben Buchstaben wie das Spiel selbst, hier also mit S. Das zu S in S komplementäre Merkmal $\bar{S}$ tritt nie ein. Wir nennen es das in S *unmögliche* Merkmal.

Wir sagen, der Durchschnitt zweier Merkmale a, b von S trete in einem Zug von S auf, wenn in ihm sowohl a, als auch b auftritt. Wir bezeichnen ihn mit $a\,b$ oder auch mit $a \cdot b$. Man kann den Durchschnitt mit Hilfe des „nicht" und des „oder" erklären:

$$(0{,}01) \qquad ab = \overline{\bar{a} \vee \bar{b}} \qquad Df.$$

Sind a und b Merkmale in einem Spiel S und tritt bei keinem Zug von S das Merkmal $a\bar{b}$ auf, d. h. ist $a\bar{b} = \bar{S}$, dann sagen wir, a sei ein Teil von b, a sei in b enthalten, b folge aus a, und schreiben $a \subset b$. In Zeichen[3]:

[3] Die hier gebrauchten logischen Begriffe und Zeichen sind den Principia mathematica von *Whitehead* und *Russell* entnommen und in einem Anhang kurz zusammengestellt. Wir verwenden sie der Deutlichkeit wegen, nicht aber kalkülmäßig.

(0,02) $$a \subset b \cdot = \cdot a\bar{b} = \bar{S} \qquad Df.$$

Aus (0,01) und (0,02) folgt unmittelbar

(0,03) $$a \subset b \cdot \equiv \cdot \bar{a} \vee b = S$$

und

(0,04) $$\bar{S} \cdot \subset \cdot a \cdot \subset \cdot a \vee b \cdot \subset \cdot S.$$

Ist $a \subset b$ und $b \subset a$, dann sind a und b aus denselben Grundmerkmalen zusammengesetzt; d. h. sie sind dasselbe Merkmal:

(0,05) $$a = b \cdot \equiv : a \subset b : b \subset a.$$

Gilt $a \subset b$ in S, dann verstehen wir unten $b—a$ das aus allen in b, nicht aber in a enthaltenen Grundmerkmalen zusammengesetzte Merkmal:

(0,06) $$b—a = b\bar{a} \qquad Df.$$

Es ist also $\bar{a} = S—a$, $a = S—\bar{a}$, $a \vee \bar{a} = S$, $a\bar{a} = \bar{S}$, $a—a = \bar{S}$.

Es ist leicht einzusehen, daß diese Begriffe denselben Gesetzen folgen, wie die entsprechenden der Mengenlehre.

C sei ein Spiel. Bei jedem Zug von C mögen zwei Merkmale a_i, b_j abgelesen werden, wobei die a_i die Grundmerkmale eines Spiels A, die b_j die Grundmerkmale eines Spiels B sind. Als Grundmerkmale in C mögen die geordneten Paare (a_i, b_j) gelten. Dann nennen wir C die *Verbindung* $A \sqcap B$ (gelesen „A mit B") von A mit B. A heiße die *erste*, B die *zweite Sparte* von C. Wir behaupten nicht, daß je zwei Spiele A, B zu $A \sqcap B$ verbunden werden können, sondern wenn wir irgendwo das Zeichen $A \sqcap B$ schreiben, wollen wir damit auch die Voraussetzung, daß $A \sqcap B$ existiert, anzeigen.

Wir schreiben das Paar (a_i, b_j) als Merkmal in $A \sqcap B$ auch als $a_i \sqcap b_j$. Ist $a = a_{i_1} \vee a_{i_2} \vee \ldots\ldots \vee a_{i_k}$ ein Merkmal in A, $b = b_{j_1} \vee b_{j_2} \vee \ldots\ldots \vee b_{j_r}$ ein Merkmal in B, dann verstehen wir unter dem Merkmal $a \sqcap b$ in $A \sqcap B$ das aus allen Merkmalen $a_{i_r} \sqcap b_{j_s}$ zusammengesetzte Merkmal. Wir schreiben es

(0, 1) $$a \sqcap b = \sum_{\substack{r=1,2\ldots k \\ s=1,2\ldots l}} (a_{i_r} \sqcap b_{j_s}) \qquad Df.$$

Damit ist auch klar, was wir unter $a \sqcap B$ verstehen. $A \sqcap B$ wird dabei auch das Zeichen für das sichere Merkmal im Spiel $A \sqcap B$.

Beispiele: a) Wir würfeln mit zwei Würfeln. b) Wir ziehen aus einem Kartenspiel mit 32 Karten. A bestehe darin, daß wir auf die

[4] Wir vereinbaren, daß Operationszeichen, die aus Merkmalen Merkmale bilden, enger binden als Zeichen, die über Merkmale etwas aussagen. Die Aussage $a \vee b = b \vee a$ ist also $(a \vee b) = (b \vee a)$, nicht etwa $a \vee (b = b) \vee a$ zu lesen.

Farbe (Herz, Karo, ...) achten, B darin, daß wir auf die Höhe der Karte (7, 8, ..., Dame, König, Aß) achten. *c*) Wir würfeln mit einem Würfel, dessen Seiten 1, 2, 3 weiß, dessen Seiten 4, 5, 6 rot sind. Das Spiel A bestehe darin, daß auf die Augenzahl geachtet wird, das Spiel B darin, daß die Farbe festgestellt wird.

Augenscheinlich unterscheidet sich das Beispiel *c* von *a* und *b* dadurch, daß in *a* und *b* aus dem in der einen Sparte auftretenden Merkmal noch nichts über das in der andern auftretende gesagt ist, während die Ergebnisse der beiden Sparten von *c*) von einander abhängen. Wir werden den Begriff der Abhängigkeit von Spielen in *H*) genau fassen.

A und B seien Sparten eines Spiels $A \sqcap B = C$. a sei ein bestimmtes Merkmal in A, b in B. Dann sagen wir, b *folge aus* a, wenn bei keinem Zug von C das Merkmal $(a, \bar{b})$ auftritt. Wir schreiben dann $a_A \subset b_B$. In Zeichen:

$$a_A \subset b_B \cdot = \cdot a \sqcap \bar{b} = \overline{A \sqcap B} \qquad Df. \tag{0,11}$$

(0,02) ist der Sonderfall von (0,11), in dem jeder Zug von A zugleich der zugehörige Zug von B ist.

In dem obigen Beispiel *c*) kann in B rot nicht auftreten, wenn 2 in A erscheint, d. h. weiß in B ist Folge von 2 in A.

Ein etwas weniger einfaches Beispiel ist das folgende: P, Q, R seien drei Würfel. Jeder trage die Merkmale 1, 2, ... 6. Sie seien als Merkmale von P mit p, von Q mit q, von R mit r bezeichnet. Dann sei a die nicht kleinere der Zahlen p, q, während b die nicht größere der Zahlen q, r sei. Das Spiel A bestehe in der Feststellung von a, B in der Feststellung von b. Dann gilt $1_A \subset 1_B$, $6_B \subset 6_A$, $2_A \subset (1 \vee 2)_B$, $5_B \subset (5 \vee 6)_A$ usw.

$$a_A \equiv b_B \cdot = : a_A \subset b_B : b_B \subset a_A \qquad Df. \tag{0,12}$$

Dann heißen a_A und b_B mit einander äquivalent.

Sind A und B Sparten eines Spiels, dann sind auch A und $A \sqcap B$ Sparten eines Spiels. Bei jedem Zug von $A \sqcap (A \sqcap B)$, der in A das Merkmal a liefert, tritt in $A \sqcap B$ das Merkmal $a \sqcap B$ auf und umgekehrt, d. h. es gilt

$$a_A \equiv (a \sqcap B)_{A \sqcap B} \text{ und } b_B \equiv (A \sqcap b)_{A \sqcap B}. \tag{0,13}$$

Wir erklären

$$(a_A \vee b_B)_{A \sqcap B} = (a \sqcap B \cdot \vee \cdot A \sqcap b)_{A \sqcap B} \qquad Df. \tag{0,2}$$

Man überlegt sich leicht die folgenden Rechenregeln:

$$a_A \vee a'_A \cdot \sqcap b_B : = : (a \sqcap b)_{A \sqcap B} \vee (a' \sqcap b)_{A \sqcap B}, \tag{0,21}$$

(0,22) $$b_B \sqcap \cdot a_A \vee a'_A :=: (b \sqcap a)_{B \sqcap A} \vee (b \sqcap a')_{B \sqcap A},$$

(0,23) $$aa'_A \sqcap b_B \cdot = \cdot (a \sqcap b)_{A \sqcap B} \cdot (a' \sqcap b)_{A \sqcap B},$$

(0,24) $$b \sqcap aa'_A \cdot = \cdot (b \sqcap a)_{B \sqcap A} \cdot (b \sqcap a')_{B \sqcap A}.$$

Nach (0,2) und (0,01) ist

$$\overline{(a_A \vee b_B)}_{A \sqcap B} = (\overline{a \sqcap B} \cdot \overline{A \sqcap b})_{A \sqcap B}.$$

Nun ist, wie unmittelbar einzusehen,

(0,25) $$\overline{a \sqcap B}_{A \sqcap B} = (\bar{a} \sqcap B)_{A \sqcap B} \text{ und } \overline{A \sqcap b}_{A \sqcap B} = (A \sqcap \bar{b})_{A \sqcap B}.$$

mithin

$$\overline{a_A \vee b_B} = (\bar{a} \sqcap B : A \sqcap \bar{b})_{A \sqcap B} = (\bar{a} \cdot \sqcap \cdot b \vee \bar{b} \therefore a \vee \bar{a} \cdot \sqcap \cdot \bar{b}) =$$
$$= (\bar{a} \sqcap b \cdot \vee \cdot \bar{a} \sqcap \bar{b} \therefore a \sqcap \bar{b} \cdot \vee \cdot \bar{a} \sqcap \bar{b})_{A \sqcap B} = (\bar{a} \sqcap \bar{b})_{A \sqcap B}.$$

Wir haben also

(0,26) $$\overline{(a_A \vee b_B)}_{A \sqcap B} = (\bar{a} \sqcap \bar{b})_{A \sqcap B}.$$

Übergang zu den Komplementen liefert sofort

(0,27) $$\overline{a \sqcap b}_{A \sqcap B} = (\bar{a} \vee \bar{b})_{A \sqcap B}.$$

(0,26) und (0,27) sind Analoga der Formeln von *De Morgan*; vgl. Anhang [7].

B. Der Eherbegriff und die Logik.

A und B seien zwei Spiele; a sei Merkmal in A, b in B. Dann betrachten wir Aussagen wie „a tritt in A eher ein, als b in B", „a tritt in A nicht eher ein, als b in B". Es ist unwesentlich, aber bequemer und führt zu einer größeren Analogie mit der Implikation[3], wenn wir statt des Begriffes „eher als" den Begriff „nicht eher als" als undefinierten Grundbegriff einführen und durch Axiome festlegen. Das tun wir. Wir schreiben die Aussage „a tritt in A nicht eher ein, als b in B" abgekürzt $a_A \leqslant b_B$.

Dann erklären wir $a_A > b_B$, gelesen „a in A eher als b in B" als das Negat von $a_A \leqslant b_B$, in Zeichen

(1,1) $$a_A > b_B \cdot = : \sim \cdot a_A \leqslant b_B \quad Df.$$

Ferner erklären wir die Zeichen $\geqslant$, $<$, $\asymp$:

(1,2) $$a_A \geqslant b_B \cdot = \cdot b_B \leqslant a_A \quad Df.$$

(1,3) $$a_A < b_B \cdot = \cdot b_B > a_A \quad Df.$$

(1,4) $$a_A \asymp b_B \cdot = : a_A \leqslant \cdot b_B \cdot b_B \leqslant a_A \quad Df.$$

Wir lesen $a_A \asymp b_B$ „a in A gleichmöglich mit b in B".

Unser erstes Axiom sagt, daß je zwei Merkmale a_A, b_B in einer Eher-Beziehung stehen:

(I_0) Von den drei Aussagen $a_A > b_B$, $a_A \asymp b_B$, $a_A < b_B$ gilt also immer genau eine.

Damit haben wir auch

(1,5) $$a_A \leqslant b_B \cdot \vee \cdot b_B \leqslant a_A.$$

Man sieht unmittelbar

(1,6) $$a_A \asymp a_A.$$

Axiom (I) legt die Transitivität des $\leqslant$ fest.

(I) $$\underline{a_A \leqslant b_B \cdot b_B \leqslant c_C : \supset \cdot a_A \leqslant c_C.}$$

Damit gilt auch

(1,7) $$a_A \asymp b_B \cdot b_B \asymp c_C : \supset \cdot a_A \asymp c_C.$$

Ferner gilt

(1,8) $$a_A < b_B \cdot b_B \leqslant c_C : \supset \cdot a_A < c_C.$$

Denn wäre $a_A \geqslant c_C$, dann hätten wir wegen $b_B \leqslant c_C$ nach (I) $b_B \leqslant a_A$ entgegen der Annahme. Ebenso zeigt man

(1,9) $$a_A \leqslant b_B \cdot b_B < c_C : \supset \cdot a_A < c_C.$$

Axiom (II) sagt, daß die Komplemente $\bar{a}$ und $\bar{b}$ in derselben Eherbeziehung stehen, wie b und a:

(II) *Ist a Merkmal in einem Spiel A, b in B, dann gilt*

$$\underline{a_A \leqslant b_B \,.\, \supset \,.\, \bar{b}_B \leqslant \bar{a}_A.}$$

Indem wir vor und hinter dem $\supset$-Zeichen negieren, bekommen wir

$$\bar{b}_B > \bar{a}_A \,.\, \supset \,.\, a_A > b_B$$

und durch Umbenennung

(2,1) $$a_A > b_B \cdot \supset \cdot \bar{b}_B > \bar{a}_A.$$

Umbenennung in II liefert

$$a_A \geqslant b_B \,.\, \supset \,.\, \bar{b}_B \geqslant \bar{a}_A$$

und das gibt mit II

(2,2) $$a_A \asymp b_B \cdot \supset \cdot \bar{a}_A \asymp \bar{b}_B.$$

Das folgende Axiom III sagt, daß $\subset$ ein Sonderfall von $\leqslant$ ist:

(III) $$\underline{a_A \subset b_B \cdot \supset \,.\, a_A \leqslant b_B.}$$

Daraus folgt unmittelbar

(3,1) $$a_A \equiv b_B \cdot \supset \cdot a_A \asymp b_B.$$

Aus III und (0,04) folgt

(3,11) $$\overline{S} \leqslant a_S \leqslant S.$$

Sind A und B Sparten eines Spiels, dann ist $A_A \equiv B_B$, nach (3,1) also

(3,12) $$A_A \asymp B_B.$$

Wegen (2,2) gilt dann auch

(3,13) $$\overline{A}_A \asymp \overline{B}_B.$$

Ist $C = A \sqcap B$ und $a \sqcap b$ ein Merkmal in C, dann ist $b \sqcap a$ Merkmal im Spiel $C^* = B \sqcap A$. C und C^* sind wieder Sparten in einem Spiel $C \sqcap C^*$. Es gilt

$$(a \sqcap b)_{A \sqcap B} \equiv (b \sqcap a)_{B \sqcap A}, \text{ also wegen (3,1)}$$

(3,2) $$(a \sqcap b)_{A \sqcap B} \asymp (b \sqcap a)_{B \sqcap A}.$$

Ähnlich gewinnt man auch Sätze wie

(3,3) $$(a \sqcap b \sqcap c)_{(A \sqcap B) \sqcap C} \asymp (a \sqcap b \sqcap c)_{A \sqcap (B \sqcap C)}.$$

Wegen (0,13) und (4,1) gilt

(3,4) $$a_A \asymp (a \sqcap B)_{A \sqcap B}, \qquad b_B \asymp (A \sqcap b)_{A \sqcap B}.$$

Die fast gleichlautenden Axiome IV und V setzen die Monotonie der Vereinigung von Merkmalen gegenüber dem Eherbegriff fest. Es seien nämlich a und a' Merkmale in einem Spiel A, b und b' Merkmale in einem Spiel B; dann lautet IV:

(IV) $$\underline{a_A \leqslant b_B : a'_A \leqslant b'_B : aa' = \overline{A} : bb' = \overline{B} : \supset \cdot (a \vee a')_A \leqslant (b \vee b')_B.}$$

Daraus folgt leicht

(4,01) $$a_A \asymp b_B : a'_A \asymp b'_B : aa' = \overline{A} : bb' = \overline{B} : \supset \cdot (a \vee a') \asymp (b \vee b')_B.$$

(V) $$\underline{a_A \leqslant b_B : a'_A < b'_B : aa' = \overline{A} : bb' = \overline{B} : \supset \cdot (a \vee a')_A < (b \vee b')_B.}$$

In IV und V ist die Voraussetzung $aa' = \overline{A}$ entbehrlich. Wir zeigen nämlich:

(4,1) $$a_A \leqslant b_B \cdot a'_A \leqslant b'_B \cdot bb' = \overline{B} : \supset \cdot (a \vee a')_A \leqslant (b \vee b')_B.$$

Beweis: Wir setzen $a - aa' = a^*$. Dann gilt $a^* \subset a$ und wegen III $a^* \leqslant a$, also nach I $a^*_A \leqslant b_B$. Ferner ist $a'a^* = \overline{A}$. Nach IV gilt also $(a' \vee a^*)_A \leqslant (b \vee b')_B$. Nun ist $(a' \vee a^*)_A = a'_A \vee (a - aa')_A = (a \vee a')_A$, womit (4,1) bewiesen ist[5].

Wir beweisen nun eine wichtige Verallgemeinerung von (4,1).

---

[5] Auf die Frage, warum in IV die Voraussetzung $aa' = \overline{A}$ aufgenommen ist, obwohl sie entbehrt werden kann, ist zu antworten: Axiom IV ist eine Implikation, also formal desto schwächer, je stärker die Voraussetzung ist. 4,1) wäre als Axiom IV formal überflüssig stark.

Es seien b b' Merkmale in B, a Merkmal in A, a' Merkmal in einem weiteren mit A verbindbaren Spiel A'. Dann behaupten wir:

(4,2) $a_A \leqslant b_B \cdot a'_{A'} \leqslant b'_B \cdot bb' = \overline{B} : \supset \cdot (a \vee a')_{A \sqcap A'} \leqslant (b \vee b')_B$.

Beweis: Nach (3,4) ist

$$a_A \asymp (a \sqcap A')_{A \sqcap A'} \text{ und } a'_A \asymp (A \sqcap a')_{A \sqcap A'},$$

wegen I also

$$(a \sqcap A')_{A \sqcap A'} \leqslant b_B \text{ und } (A \sqcap a')_{A \sqcap A'} \leqslant b'_B;$$

(4,1) liefert also

$$(a \sqcap A')_{A \sqcap A'} \vee (A \sqcap a')_{A \sqcap A'} \leqslant (b \vee b')_B,$$

d. h. nach (0,2) die Behauptung.

Ebenso zeigt man, indem man gelegentlich (1,8) statt I verwendet, die folgenden Sätze (5,1) und (5,3):

(5,1) $a_A \leqslant b_B : a'_A < b'_B : bb' = \overline{B} : \supset \cdot (a \vee a')_A < (b \vee b')_B$,

(5,2) $a_A \leqslant b_B : a'_{A'} < b'_B : bb' = \overline{B} : \supset \cdot (a \vee a')_{A \sqcap A'} < (b \vee b')_B$.

IV, (4,01), (4,1), (4,2), V, (5,1), (5,2) sind Analoga des *Leibniz*schen Multiplikationssatzes[6] und haben für die folgenden Entwicklungen eine ähnliche Bedeutung, wie dieser für die Logik. Wir brauchen sie, um aus dem Zusammenbestehen von Eheraussagen andere derartige Aussagen abzuleiten[7].

Setzt man in (5,1) für die Spiele A, B das Spiel A, für dieMerkmale a, b, a', b', der Reihe nach a, a, $\overline{A}$, b, dann erhält man

(5,3) $\overline{A}_A < b_A \cdot ab_A = \overline{A} \cdot \supset a_A < (a \vee b)_A$.

Die genannten Axiome sagen noch nichts über die Empfindlichkeit des Eherbegriffs aus. Sie sind z. B. noch erfüllt, wenn wir alle Merkmale als gleichmöglich ansehen. Wir schließen diese Deutung des „eher" durch das Axiom VI aus:

(VI) *In jedem Spiel S gilt $S > \overline{S}$.*

Wir wollen die Annahme, daß je zwei Spiele A, B zu einem Spiel $A \sqcap B$ verbindbar sind, nicht machen. Deshalb setzen wir die in diesem Fall beweisbare Aussage von (3,12) als Axiom fest:

(VII) *Für je zwei Spiele A, B gilt $A_A \asymp B_B$.*

C. Die Gruppe eines Spiels.

S sei ein Spiel mit den Grundmerkmalen $a_1, a_2, \ldots . a_n$. Die Permutationen von $a_1, a_2, \ldots . a_n$, durch die jeder Zug von S in einen

[6] Vgl. Anhang 9.

[7] Bei *Koopman* haben diese Aufgabe die Axiome C und D.

Zug von S übergeht, bilden eine Gruppe. Wir nennen sie die Gruppe des Spiels S.

Beispiele:

1) S sei das Würfeln mit einem Würfel W, dessen Seiten in üblicher Weise die Merkmale 1, 2, ... 6 tragen. Er sei „richtig", d. h. er gehe durch jede der Würfelgruppe angehörende Permutation P der Merkmale geometrisch und physikalisch in sich über. Dann geht jeder als physikalischer Vorgang aufgefaßte Wurf mit W durch jede solche Permutation in einen Wurf mit W, d. h. in einen Zug von S über. Andererseits entsteht durch eine nicht der Würfelgruppe angehörende Permutation Q der Merkmale aus W ein Würfel W', auf dem die Merkmale nicht in der üblichen Weise angeordnet sind, d. h. ein anderes Spielgerät. Jeder Zug aus S geht durch Q in einen Wurf mit W' über, d. h. nicht in einen Zug aus S. Die Gruppe von S ist also die Würfelgruppe.

2) S sei das Würfeln mit einem geometrisch genauen Würfel, in dem die Masse so verteilt ist, daß der Schwerpunkt auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte der einander gegenüberliegenden Seiten 1 und 6 näher an 1 als an 6 liegt. Die übrigen Seiten mögen, von 6 gegen 1 gesehen, wie bei dem mir vorliegenden Würfel, in der Reihenfolge 2, 4, 5, 3 zyklisch aufeinander folgen. Durch eine Permutation der Merkmale, welche 1 und 6 nicht festläßt, geht W nicht in sich über, sondern in einen Würfel W', dessen Schwerpunkt zu den Merkmalen anders liegt als bei W. Ein Wurf mit W' ist also kein Zug in S. Die Permutation gehört der Gruppe von S nicht an. Die Gruppe von S ist natürlich die Gruppe der zyklischen Permutationen von (2, 4, 5, 3).

3) S sei das Ziehen aus einer Urne, in der n während des Ziehens nicht unterscheidbare mit 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugeln liegen. Jede Permutation der Merkmale führt jeden Zug von S in einen Zug von S über. Die Gruppe von S ist also die symmetrische Gruppe S^n.

4) Wir werfen mit einer Münze, deren Seiten mit 0 und 1 bezeichnet sind. Zwischen ihnen bestehe (abgesehen von der Bezeichnung) geometrische und physikalische Symmetrie. Die Gruppe des Spiels ist die symmetrische Gruppe S^2.

5) Wir werfen mit einem aus Blech gestanzten dreieckigen Plättchen, dessen Seiten drei verschiedene Längen a, b, c haben. Die Dreiecksflächen seien mit 0 und 1 beschrieben. Durch die Permutation (0,1) geht das Plättchen nicht in sich über. Die Gruppe des Spiels ist leer, d. h. hat außer dem Einheitselement kein Element.

Wir wollen in diesem und ähnlichen Fällen, d. h. in allen Fällen, in denen die Umwelt auf das Spielgerät genau so wirkt, wie eine zu ihr symmetrische Umwelt, auch Züge mit dem zum gegebenen symmetrischen Spielgerät als Züge des Spiels gelten lassen. Dann ist die Gruppe des Werfens mit dem dreieckigen Plättchen (und dem dazu symmetrischen) die Gruppe S^2.

Wir nennen nun je zwei Merkmale eines Spiels S, die durch eine Permutation der Gruppe ineinander übergeführt werden können, mit einander *gleichberechtigt*. Hier ist zunächst an Grundmerkmale, dann an beliebige Merkmale gedacht.

Das folgende Axiom VIII beschreibt einen Teil des Zusammenhanges zwischen dem Eherbegriff und der Wirklichkeit.

(VIII) *Sind in einem Spiel S die Grundmerkmale a und b gleichberechtigt, dann sind sie in S auch gleichmöglich*, d. h. *dann gilt $a \asymp b$ in S.*

Mit Hilfe von (4,01) folgern wir leicht:

(8,1) Sind in einem Spiel S die (möglicherweise zusammengesetzten) Merkmale a und b gleichberechtigt, dann sind sie in S auch gleichmöglich, d. h. dann gilt $a \asymp b$ in S.

Wenn die Gruppe von S transitiv ist, dann und nur dann sind je zwei Grundmerkmale in S gleichberechtigt; dann hat S lauter einander gleichmögliche Grundmerkmale. Solche gleichmögliche Grundmerkmale sind also die sechs Seiten eines richtigen Würfels, die zwei Seiten einer Münze, die Lose in einer Urne, die Felder in einem richtigen Roulettespiel.

Eine ungleich schärfere Aussage über die Empfindlichkeit des Eherbegriffs als VI ist die folgende:

(8,2) Ist A ein Spiel mit den gleichberechtigten Grundmerkmalen $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$, dann ist $a_1 > \overline{A}$.

Angenommen, es wäre $a_1 \leqslant \overline{A}$. Dann wäre wegen I auch $a_2 \leqslant \overline{A}$. Setzen wir in (4,1) der Reihe nach für die Spiele A, B die Spiele A, A, für die Merkmale a, b, a', b' die Merkmale a_1, $\overline{A}$, a_2, $\overline{A}$, dann erhalten wir die Folgerung $a_1 \vee a_2 \leqslant \overline{A}$. Durch Schluß von i auf $i+1$ schließen wir ebenso, daß für $i=1, 2, \ldots\ldots n$ $a_1 \vee a_2 \ldots\ldots \vee a_i \leqslant \overline{A}$ wäre. Für $i=n$ bedeutet das $A \leqslant \overline{A}$, was durch VI ausgeschlossen ist.

Aus (5,3) und (8,2) folgt unmittelbar:

(8,3) Sind $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ die Grundmerkmale in einem Spiel A und untereinander gleichberechtigt, dann gilt

$$a_1 < a_1 \vee a_2 < a_1 \vee a_2 \vee a_3 < a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_4 < \ldots\ldots < a_1 \vee a_2 \vee \ldots\ldots \vee a_n = A.$$

In Spielen mit transitiver Gruppe wollen wir die *Laplace*sche Wahrscheinlichkeitsdefinition wieder aufnehmen. Wir nennen solche Spiele *Laplace*sche Spiele und erklären:

(8,4) Ist L ein *Laplace*sches Spiel mit den Grundmerkmalen a_1, a_2, ... a_n und ist $a = a_1 \vee a_2 \vee \ldots\ldots \vee a_m$, dann verstehen wir unter der *Wahrscheinlichkeit* von a in L den Bruch

$$w_L(a) = \frac{m}{n}$$

Aus (8,3) folgt unmittelbar:

Ist L ein *Laplace*sches Spiel, dann gilt für je zwei Merkmale a, b von L

(8,51) $$a_L < b_L \cdot \equiv \cdot w_L(a) < w_L(b)$$

(8,52) $$a_L \leqslant b_L \cdot \equiv \cdot w_L(a) \leqq w_L(b)$$

(8,6) $$a_L \asymp b_L \cdot \equiv \cdot w_L(a) = w_L(b).$$

Ferner gilt in *Laplace*schen Spielen L:

(8,7) $$0 \leqq w_L(a) \leqq 1$$

(8,71) $$w_L(L) = 1, \quad w_L(\bar{L}) = 0$$

(8,8) $$w_L(a \vee b) + w_L(ab) = w_L(a) + w_L(b).$$

(8,9) A und B seien *Laplace*sche Spiele, a Merkmal in A, b Merkmal in B. Dann gilt

$$a_A \leqslant b_B \cdot \equiv w_A(a) \leqq w_B(b)$$

Beweis: Die Grundmerkmale von A mögen a_1, a_2, ... a_m, die von B mögen b_1, b_2, ... b_n heißen. Wir beweisen (8,9) zunächst für $a = a_1$, $b = b_1$; d. h. wir wollen zunächst

$$a_{1A} \leqslant b_{1B} \cdot \equiv \cdot m \geqq n$$

zeigen. Angenommen, es wäre $m \geqq n$ und $b_{1B} < a_{1A}$. Dann wäre wegen (5,3)

$$B_B = \cdot b_1 \vee b_2 \vee b_3 \ldots\ldots \vee b_n \cdot < \cdot a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \ldots\ldots \vee a_n \cdot \leqslant A_A,$$

also $B_B < A_A$, entgegen VII, bzw. (3,12). Wir haben also $m \geqq n \cdot \supset \cdot a_{1A} \leqslant b_{1B}$.

Wäre andererseits $a_{1A} \leqslant b_{1B}$ und $m < n$, dann wäre wegen (4,1) und (8,3)

$$A_A = (a_1 \vee a_2 \vee \ldots\ldots a_m)_A \leqslant b_1 \vee b_2 \vee \ldots\ldots \vee b_m)_B < B_B,$$

also $A_A < B_B$ entgegen VII.

Nun seien $a = a_1 \vee a_2 \vee \ldots\ldots \vee a_r$, $b = b_1 \vee b_2 \vee \ldots\ldots \vee b_s$ beliebige Merkmale. (8,9) behauptet

$$a_A \leqslant b_B \cdot \equiv \cdot \frac{r}{m} \leqq \frac{s}{n}.$$

C sei ein *Laplace*sches Spiel, z. B. ein Urnenspiel mit mn Grundmerkmalen $c_1, c_2, \ldots\ldots c_{mn}$. Dann gilt

$$c_1 \vee c_2 \vee \ldots\ldots \vee c_n \asymp c_{n+1} \vee c_{n+2} \vee, \ldots\ldots \vee c_{2n} \asymp c_{2n+1} \vee c_{2n+2} \vee \ldots \vee c_{3n} \ldots \asymp \ldots$$

Daraus schließt man ganz wie oben, daß $a_{1A} \asymp (c_1 \vee c_2 \vee \ldots\ldots \vee c_n)_C$ ist. Entsprechend gilt $b_{1B} \asymp (c_1 \vee c_2 \vee \ldots\ldots \vee c_m)_C$. Daher ist

$$a = (a_1 \vee a_2 \vee \ldots\ldots \vee a_r)_A \asymp (c_1 \vee c_2 \vee \ldots\ldots c_{nr})_C \text{ und}$$

$$b = (b_1 \vee b_2 \vee \ldots\ldots \vee b_s)_B \asymp (c_1 \vee c_2 \vee \ldots\ldots c_{ms})_C.$$

Nach (8,52) ist also

$$a_A \leqslant b_B \cdot \equiv \cdot nr \leqq ms,$$

was zu beweisen war.

D. der allgemeine Wahrscheinlichkeitsbegriff.

Das Spiel U_R bestehe im Ziehen aus einer Urne, in der R gleiche Kugeln liegen. Sie seien mit 1, 2, ... R bezeichnet. Es sei $m_i = 1 \vee 2 \vee \ldots\ldots \vee i$ für $i = 1, 2, \ldots. R$; außerdem setzen wir $m_0 = \overline{U}_R$. Dann ist

$$w(m_i) = \frac{i}{R} \tag{9,01}$$

Nun sei a Merkmal in einem Spiel A. $v(R, a)$ sei für $a \neq A$, die die Aussage

$$m_v \leqslant a < m_{v+1} \tag{9,02}$$

erfüllende ganze Zahl v, während $v(R, A) = R$ sei.

Wir denken uns für jedes R eine solche Urne. Dann ist für jedes a der Grenzwert

$$\lim_{R \to \infty} \frac{v(R, a)}{R} \tag{9,03}$$

vorhanden und es gilt

$$0 \leqq \lim_{R \to \infty} \frac{v(R, a)}{R} \leqq 1. \tag{9,04}$$

Beweis: Für $a = A$ ist das selbstverständlich. Nun sei $a \neq A$. Dann gilt für je zwei natürliche Zahlen R und S nach (9,02)

$$m_{v(R,a)} \leqq a < m_{v(S,a)+1},$$
$$m_{v(S,a)} \leqq a < m_{v(R,a)+1},$$

also wegen (1,9)

$$m_{v(R,a)} < m_{v(S,a)+1} \text{ und } m_{v(S,a)} < m_{v(R,a)+1}$$

daher ist wegen (8,51)

$$\frac{v(R,a)}{R} < \frac{v(S,a)+1}{S} \text{ und } \frac{v(S,a)}{S} < \frac{v(R,a)+1}{R},$$

mithin $-\frac{1}{R} < \frac{v(R,a)}{R} - \frac{v(S,a)}{S} < \frac{1}{S}$.

Die Folge $\frac{v(R,a)}{R}$ genügt damit dem *Cauchy*schen Konvergenzprinzip. Wegen $0 \leqq i \leqq R$ gilt auch (9,04).

Wenn dabei A ein *Laplace*sches Spiel ist, gilt wegen (9,02), (8,51), (8,52), (9,01) für jedes R

$$\frac{v(R,a)}{R} \leqq w_A(a) < \frac{v(R,a)+1}{R}.$$

(9,05) Daher ist dann $w_A(a) = \lim_{R \to \infty} \frac{v(R,a)}{R}$.

Wir erklären deshalb für beliebige Spiele A die *Wahrscheinlichkeit* $w_A(a)$ eines Merkmals a in A als

(9,1) $$w_A(a) = \lim_{R \to \infty} \frac{v(R,a)}{R}. \qquad Df.$$

Es folgt leicht

(9,11) $$w_A(A) = 1,\ w_A(\bar{A}) = 0,\ 0 \leqq w_A(a) \leqq 1.$$

Ferner gilt

(9,12) $$a_A \leqslant b_B \cdot \supset \cdot w_A(a) \leqq w_B(b).$$

Denn nach (9,02) gilt für jedes R

$$m_{v(R,a)} \leqq a < m_{v(R,a)+1}$$
$$m_{v(R,b)} \leqq b < m_{v(R,b)+1}$$

Ist $a_A \leqslant b_B$, dann ist wegen (1,9)

$m_{v(R,a)} < m_{v(R,b)+1}$, also wegen (8,52)

$\frac{a(R,a)}{R} < \frac{v(R,b)+1}{R}$, mithin $w_A(a) \leqq w_B(b)$.

In (9,12) können wir nur eine Implikation, keine Äquivalenz behaupten. Mit unseren Axiomen ist tatsächlich noch ein „eher" verträglich, das numerisch, wenigstens mit einem archimedischen Zahlensystem, nicht mehr wiedergegeben werden kann. Wir können z. B. einen Eherbegriff haben, nach dem ein Punkt eher in der Strecke $0 \leqq x \leqq 1$ als in der Strecke $0 \leqq x < 1$ liegt, während wir die Wahrscheinlichkeit nicht so fein abstufen können. In *Laplace*schen Spielen haben wir die Äquivalenz (8,9). Wir könnten sie durch ein Axiom auch in beliebigen Spielen erzwingen. Wir wollen das aber nicht tun, weil wir den Eherbegriff nur als Mittel zur Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs verwenden. Wir wollen aber festhalten, daß das „eher" nicht eindeutig festgelegt ist.

E. Der Summensatz.

Sind A und A' Sparten eines Spiels, ist a Merkmal in A, a' in A', dann gilt

(9,21) $$w_{A \sqcap A'}(a \vee a') \leqq w_A(a) + w_{A'}(a').$$

Beweis: Wenn $w_A(a) + w_{A'}(a') \geqq 1$ ist, gilt die Behauptung wegen (9,11). Nun sei $w_A(a) + w_{A'}(a') < 1$. Wir wählen zwei rationale Zahlen r und r', so daß $r > w_A(a)$, $r' > w_{A'}(a')$ und $r + r' < 1$ ist, ferner in einem Urnenspiel B zwei Merkmale b, b', so daß $bb' = \overline{B}$, $w(b) = r$, $w(b') = r'$ ist. Dann gilt

$$w_B(b) > w_A(a), \quad w_B(b') > w_{A'}(a').$$

Wegen (9,12) gilt also $b_B > a_A \cdot b'_B > a'_{A'}$. Damit sind die Voraussetzungen von (4,2) erfüllt. Es gilt also $a_A \vee a'_{A'} \leqq b_B \vee b'_B$. Nach (9,12) ist also

$$w_{A \sqcap A'}(a \vee a') \leqq w_B(b \vee b'), \text{ d. h. } w_{A \sqcap A'}(a \vee a') \leqq r + r'.$$

Weil das für jedes $r > w_A(a)$ und jedes $r' > w_{A'}(a')$ gilt, ist die Behauptung bewiesen.

Wenn a und a' Merkmale in demselben Spiel A sind, nimmt (9,21) die Form an:

(9,22) $$w_A(a \vee a') \leqq w_A(a) + w_A(a').$$

Wir behaupten nun:

(9,23) $$w_A(a) + w_A(\bar{a}) = 1.$$

Beweis: Für $a = A$ gilt das wegen (9,11). Nun sei $a \neq A$. Wir verstehen

unter n_i das Urnenmerkmal $U - m_{R-i}$ (in der Bezeichnung von (9,01)). Also ist

$$w(n_i) = w(m_i) = \frac{i}{R}.$$

Wie dort sei $v(R, a)$ so erklärt, daß

(*) $$m_{v(R,a)} \leqq a < m_{v(R,a)+1}$$

(**) $$n_{v(R,\bar{a})} \leqq \bar{a} < n_{v(R,\bar{a})+1}$$

ist. Wegen (*) ist

$(*\,*)$ $$m_{R-v(R,a)-1} < \bar{a} \leqq n_{R-v(R,a)},$$

wegen (**) und $(*\,*)$ also

$$R - v(R, a) - 1 \leqq v(R, \bar{a}) \text{ und}$$

$$v(R, \bar{a}) \leqq R - v(R, a), \text{ also}$$

(9,24) $$R - 1 \leqq v(R, a) + v(R, \bar{a}) \leqq R,$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Jetzt können wir zeigen:

(9,25) Sind a und a' Merkmale in einem Spiel A und ist $aa' = \overline{A}$, dann gilt

$$w_A(a \vee a') = w_A(a) + w_A(a').$$

Beweis: Wegen (9,22) brauchen wir nur

$$w_A(a \vee a') \geqq w_A(a) + w_A(a')$$

zu beweisen. Wegen $aa' = \overline{A}$ ist $a' \subset \bar{a}$, d. h. $v(R, a') \leqq v(R, \bar{a})$. Wegen (9,24) ist also $v(R, a) + v(R, a') \leqq R$. Deshalb ist $m_{v(R,a)} n_{v(R,a')} = \overline{U}$. Wir haben also

$$m_{v(R,a)} \leqq a : n_{v(R,a')} \leqq a' : aa' = \overline{A}.$$

(4,1) liefert also $m_{v(R,a)} \vee n_{v(R,a')} \leqq a \vee a'$. Nun ist

$$m_{v(R,a)} \vee n_{v(R,a')} \asymp \cdot\, m_{v(R,a)+v(R,a')},$$

weshalb $v(R, a) + v(R, a') \leqq v(R, a \vee a')$ gilt und die Behauptung bewiesen ist.

Aus (9,25) folgt unmittelbar

(9,26) $$a'_A \subset a_A \cdot \supset \cdot\, w_A(a - a') = w_A(a) - w_A(a').$$

Nun gewinnt man leicht:

(9,27) $$w_A(a) + w_A(a') = w_A(a \vee a') + w_A(aa').$$

Denn $a \vee a' \cdot = : a \cdot \vee \cdot a' - aa'$, also wegen (9,25)

$$w(a \vee a') = w(a) + w(a' - aa');$$

andererseits ist $w(a' - aa') + w(aa') = w(a')$, woraus (9,27) folgt.

Wir setzen nun in (9,22) $a = \bar{b}$, $a' = \bar{b}'$. Dann bekommen wir

$$w_A(\bar{b}\bar{b}') \leqq w_A(\bar{b}) + w_A(\bar{b}'); \text{ d. h.}$$

$$1 - w_A(bb') \leqq 1 - w_A(b) + 1 - w_A(b'), \text{ also}$$

$$w_A(bb') \geqq w_A(b) + w_A(b') - 1.$$

Wir haben also den Satz

Sind a und a' Merkmale in einem Spiel A, dann gilt

(9,31) $$w_A(aa') \geqq w_A(a) + w_A(a') - 1.$$

Nach (9,21) ist

$$w_{A \sqcap A'}(a \vee a') \leqq w_A(a) + w_{A'}(a'),$$

wenn A und A' Sparten eines Spiels sind und a Merkmal A, a' in A' ist. Wegen (9,23) ist also

$$w_{A \sqcap A'}\overline{(a \vee a')} \geqq 1 - w_A(a) - w_{A'}(a').$$

(0,26) liefert

$$w_{A \sqcap A'}(\bar{a} \sqcap \bar{a}') \geqq 1 - w_A(a) - w_{A'}(a') = w_A(\bar{a}) + w_{A'}(\bar{a}') - 1.$$

Mit Änderung der Bezeichnung haben wir also

(9,32) $$w_{A \sqcap A'}(a \sqcap a') \geqq w_A(a) + w_{A'}(a') - 1.$$

F. Wahrscheinlichkeit von Aussagen.

Wir haben bis jetzt nur den *Merkmalen* in unseren Spielen Wahrscheinlichkeiten zuerkannt. Wir wollen nun, wenn a im Spiel A eher eintritt als b im Spiel B, auch sagen, die *Aussage* „a tritt in A ein", sei eher richtig als die Aussage „b tritt in B ein". Das ist eine unwesentliche, aber bequeme Ausgestaltung unserer Ausdrucksweise. Ebenso wollen wir die Wahrscheinlichkeit $w_A(a)$ auch der Aussage „a tritt in A ein" zuerkennen. Statt zu sagen, a habe in A die Wahrscheinlichkeit p, wollen wir auch sagen, die Aussage $(x \subset a)_A$ habe die Wahrscheinlichkeit p, wo x eine alle Grundmerkmale von A durchlaufende Veränderliche bedeutet.

Diese Ausdrucksweise ist in folgendem Fall besonders bequem: S sei ein Spiel mit den Merkmalen 1, 2, 3, ... R. Statt zu sagen, das Merkmal $k+1 \cdot \vee \cdot k+2 \cdot \vee \cdot \ldots\ldots \cdot \vee \cdot k+l$ habe in S die Wahrscheinlichkeit p, können wir jetzt sagen, die Ungleichung

$$k < x \leqq k + l$$

habe in S die Wahrscheinlichkeit p, und schreiben

$$w_S(k < x \leqq k + l) = p.$$

Dabei kann das S, wenn es selbstverständlich ist, auch weggelassen werden.

Im selben Sinn wollen wir sagen, eine Gleichung oder Ungleichung trete in S eher ein als ein gewisses Merkmal a_A, und schreiben etwa

$$(k < x \leqq k + l)_S > a_A.$$

In diesem Sinn wollen wir auch vom Merkmal $(k < x \leqq k + l)_S$ und dgl. sprechen.

G. Häufigkeiten.

Wir haben bis jetzt nirgends eine Voraussetzung darüber gemacht, ob in einem Spiel mehrere Züge — zugleich oder nach einander — möglich sein sollen oder nicht. Wir lassen die Frage offen, ob wir über Merkmale in Spielen, in denen es nur einen Zug gibt, überhaupt Eher- und Wahrscheinlichkeitsaussagen machen können. Jedenfalls haben wir nur in Spielen, in denen es viele Züge gibt, wobei das „viele" natürlich dehnbar ist, die Möglichkeit, solche Aussagen auf ihre Brauchbarkeit zu prüfen.

Wir befassen uns deshalb von jetzt an nur mit Spielen, in denen beliebig viele Züge möglich sind. In Wirklichkeit gibt es solche Spiele nicht. Der Anzahl von Zügen in einem Würfelspiel ist z. B. durch unsere Lebensdauer und durch die Abnützung des Würfels eine Schranke gesetzt. Wir setzen dabei als selbstverständlich voraus, daß alle Züge demselben Spiel angehören, d. h. daß sich die Spielregel und das Spielgerät nicht von Zug zu Zug ändern, z. B. daß sich die Würfel, mit denen wir würfeln, nicht abnützen. Die *beliebig oft wiederholbaren Spiele*, die wir in Hinkunft betrachten, sind also Ideale, denen die wirklichen Spiele nur sehr nahe kommen, wie sich auch die Geometrie mit idealisierten Dingen befaßt. Wir wollen jetzt erklären, was wir unter dem Wiederholen eines Spiels verstehen wollen:

Wir nennen zwei Spiele A und A' *kongruent*, wenn sie dieselben Grundmerkmale $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ haben und wenn $a_{iA} \asymp a_{iA'}$ für $i = 1, 2, \ldots\ldots n$ ist.

Ist z. B. A das Würfeln mit einem richtigen Würfel, dessen Seiten mit 1, 2, ... 6 bezeichnet sind, A' das Ziehen aus einer Urne, in der sechs mit 1, 2, ... 6 bezeichnete Lose liegen, dann sind A und A' kongruent.

Kongruente Spiele, deren Gruppen überdies einstufig isomorph sind, nennen wir auch *dasselbe Spiel* oder *Wiederholungen* desselben Spiels.

Wir werfen z. B. mit einem Würfel W oftmals. Der Würfel mag sich dabei abnützen. Wenn sich nur dabei die Wahrscheinlichkeiten der Merkmale und die Gruppe des Spiels nicht ändern, sehen wir diese Würfe als Züge in einem Spiel an, sonst nicht.

Besteht[8] ein Spiel S darin, daß in einem Spiel A zweimal gezogen wird und das geordnete Paar der beiden gezogenen Merkmale a, b von A als Merkmal in S gilt, dann können wir S mit $A \sqcap A$, dieses Merkmal mit $a \sqcap b$ bezeichnen. Für $A \sqcap A$ schreiben wir kurz A^2; entsprechend schreiben wir für $a \sqcap a$ auch a^2 und erklären in naheliegender Weise a^n und A^n.

Beim Wiederholen eines Spiels spielt die Zeit nur insoferne eine Rolle, als das Spielgerät es oft nicht zuläßt, daß alle Züge von A^n zugleich gemacht werden. Wir wollen in der Regel auch gar keine Reihenfolge der gemachten Züge voraussetzen. Die ist uns, wenn nicht das Gegenteil gesagt wird, gleichgültig. Unter einem *beliebig oft wiederholbaren Spiel* verstehen wir ein Spiel A, zu dem es für jedes n ein Spiel A^n gibt, dessen Sparten im Sinn des folgenden Axioms von einander unabhängig sind.

(IX) Sind c und d Merkmale in A^k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, a ein Merkmal in A, dann gilt

$$c \leqslant d \cdot \supset \cdot (a \sqcap c)_{A^{k+1}} \leqslant (a \sqcap d)_{A^{k+1}}$$

Wegen 3,2 ist das gleichbedeutend mit

$$c \leqslant d \cdot \supset \cdot (c \sqcap a)_{A^{k+1}} \leqslant (d \sqcap a)_{A^{k+1}}$$

Dabei wird nicht vorausgesetzt, daß a, c, d Grundmerkmale sind. Durch dieses Axiom beschränken wir uns auf beliebig oft wiederholbare Spiele.

Wir verallgemeinern nun IX zu dem folgenden Satz:

(9,33) Ist $n = k + l$, $A^n = A^k \sqcap A^l$, ist b Merkmal in A^k und sind c und d Merkmale in A^l, dann gilt

$$c \leqslant d \cdot \equiv \cdot b \sqcap c \leqslant b \sqcap d \cdot \equiv \cdot c \sqcap b \leqslant d \sqcap b.$$

Für $k = 1$ ist das die Aussage IX. Wir zeigen, daß sie für $k + 1$ gilt, wenn sie für k gilt. Es sei also $b = a \sqcap a'$, wo a Merkmal in A, a' Merkmal in A^k ist. Ferner sei $c \leqslant d$. Dann ist $b \sqcap c = a \sqcap a' \sqcap c$. Laut Induktionsannahme ist $a' \sqcap c \leqslant a' \sqcap d$, also nach IX $a \sqcap a' \sqcap c \leqslant a \sqcap a' \sqcap d$.

[8] Die Entwicklungen von hier bis ausschließlich (9,4) wurden gelegentlich des Neusatzes 1947 eingefügt und damit Satz (9,4), der ursprünglich als Axiom IX eingeführt worden war, auf das einfachere, hier mit IX bezeichnete Axiom zurückgeführt.

Damit ist zunächst $c \leqslant d \cdot \supset \cdot b \sqcap c \leqslant b \sqcap d$, dann aber auch 9,33 bewiesen.

Glücksspiele werden in der Regel so eingerichtet, daß IX gilt. Zu diesem Zweck werden z. B. die Lose in einer Urne — wie tausendfältige Erfahrung lehrt, mit dem gewünschten Erfolg — vor jedem Zug gehörig durcheinandergeschüttelt. Wir setzen also im folgenden von Urnen immer voraus, daß sie IX befriedigen[9].

(9,34) Sind a und b Merkmale in A, dann gilt

$$a_A \leqslant b_A \cdot \supset \cdot a^n_{A^n} \leqslant b^n_{A^n} \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Beweis: Für $n = 1$ ist das richtig. Nun gelte die Behauptung für ein bestimmtes n. Wir zeigen sie für $n + 1$.

Aus $a_A \leqslant b_A$ folgt
$a^{n+1} = a^n \sqcap a \leqslant b^n \sqcap a$ wegen der Induktionsannahme und (9,33). Ferner ist
$b^n \sqcap a \leqslant b^n \sqcap b$ wegen IX, womit (9,34) bewiesen ist.

Nun sei a Merkmal in einem Spiel A. Ein Merkmal $a_1 \sqcap a_2 \sqcap a_3 \sqcap \ldots a_n$ in A^n heiße ein Monom k-ten Grades von der Spartenzahl n, wenn jedes der a_i entweder a oder A ist; z. B. ist $a \sqcap a \sqcap A$ ein Monom zweiten Grades von der Spartenzahl 3.

Unter einem Polynom in a von der Höhe k in A^n verstehen wir ein Merkmal
$m_1(a) \vee m_2(a) \vee \ldots\ldots \vee m_s(a)$, in dem die $m_i(a)$ Monome mindestens k-ten Grades in A^n sind, unter denen mindestens eines genau den Grad k hat.

Wir behaupten nun:

(9,36) Ist $a_A \leqslant b_A$ und $f(x)$ ein Polynom in A^n, dann gilt $f(a) \leqslant f(b)$.

Beweis: $f(a)$ habe die Höhe k. Für $k = 0$ ist $f(a) = A^n$, $f(b) = B^n$, die Behauptung also zufolge von VII bzw. 3,12 richtig. Für $k = n$ ist $f(a) = a^n$, $f(b) = b^n$. In diesem Fall ist 9,36 nichts anderes als 9,34.

---

[9] Würden wir von IX nur den Fall $k = 1$ voraussetzen, d. h. nur annehmen, daß je zwei Züge in A voneinander unabhängig sind, dann könnten wir IX für beliebiges k nicht ohne weitere Annahme schließen. Das zeigt das folgende Beispiel. S sei ein Urnenspiel mit den beiden gleichmöglichen Grundmerkmalen 0 und 1. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ seien Grundmerkmale von S, wie sie beim Wiederholen von S der Reihe nach auftreten. Das Spiel A bestehe darin, daß im n-ten Zug das geordnete Paar (a_n, b_n) als Merkmal angesehen wird, wenn $b_n \equiv a_{n-2} + a_{n-1}$ mod 2 ist. Dann gilt IX in A für $k = 2$ ersichtlich nicht. Es gilt aber, wie der Leser sich selbst überlegen möge, für $k = 1$.

Nun sei $0 < k < n$. Dann fassen wir in $f(a)$ die Monome zusammen, jenachdem sie in der letzten Sparte a oder A enthalten:
$f(a) \cdot = \therefore d(a) \sqcap a \cdot \vee \cdot h(a) \sqcap A \therefore = \therefore d(a) \sqcap a : \vee : h(a) \cdot \sqcap \cdot b \vee \bar{b}$

Wegen 9,33 und 4,1 ist also

$$f(a) \cdot \leqslant \therefore d(a) \sqcap b : \vee : h(a) \cdot \sqcap \cdot b \vee \bar{b} \therefore \asymp$$
$$\asymp \therefore d(a) \vee h(a) \cdot \sqcap \cdot b : \vee : h(a) \sqcap \bar{b}$$

$d(a) \vee h(a)$ und $h(a)$ sind Polynome in n-1 Sparten und haben Höhen $\leqslant k$. Setzen wir voraus, daß 9,36 für n-1 Sparten bereits sicher ist, dann können wir mit Hilfe von IX weiterschließen:

$$f(a) \cdot \leqslant \therefore d(b) \vee h(b) \cdot \sqcap \cdot b : \vee : h(b) \sqcap \bar{b} \therefore \asymp \cdot f(b)$$

Weil 9,36 für beliebiges n gilt, wenn $k = 0$ oder $k = n$ gilt, ist damit 9,36 allgemein bewiesen.

(9,37) A und B seien miteinander verbindbare Spiele. Ferner sei $a_A \leqslant b_B$ und $f(a)$ ein Polynom in A^n, $f(b)$ das gleichgebaute Polynom von b in B^n. Dann ist $f(a) \leqslant f(b)$.

Beweis: Wegen (0,13) bis (0,24), (3,2) und (3,3) ist

$$f(a)_{A^n} \equiv (f(a) \sqcap B^n)_{A^n \sqcap B^n} \equiv f(a \sqcap B)_{(A \sqcap B)^n}$$
$$f(b)_{B^n} \equiv (A^n \sqcap f(b))_{A^n \sqcap B^n} \equiv f(A \sqcap b)_{(A \sqcap B)^n}$$

Wegen $(a \sqcap B)_{A \sqcap B} \leqslant (A \sqcap b)_{A \sqcap B}$ und 9,36 ist also

$$f(a \sqcap B)_{(A \sqcap B)^n} \leqslant f(A \sqcap b)_{(A \sqcap B)^n},$$

woraus 9,37 unmittelbar folgt.

Eine einfache Anwendung von 9,37 liefert den folgenden wichtigen Satz:

(9,38) Ist $a_A \leqslant b_B$, dann gilt für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $k = 0, 1, 2, 3, \ldots . n$

$$H_n(a_A) \geqq k \cdot \leqslant \cdot H_n(b_B) \geqq k.$$

Denn $H_n(a_A) \geqq k$ ist nach unserer Verabredung in F ein Zeichen für das Polynom von a in A^n, das aus allen Monomen mindestens k-ten Grades besteht.

Weil H_n nur ganzzahlig $\geqq 0$ sein kann, ändert sich an der Bedeutung von 9,38 nichts, wenn man darin k alle reellen Zahlen durchlaufen läßt. Schreibt man dann noch statt in H_n in h_n, dann nimmt der Satz die folgende Form an, in der wir ihn verwenden wollen:

(9,4) Ist $a_A \leqslant b_B$, dann gilt für jedes reelle x

$$h_n(a_A) \leqq x \cdot \geqslant \cdot h_n(b_B) \leqq x.$$

U sei ein Urnenspiel mit R Kugeln 1, 2, ... R. Seine Gruppe ist die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}^R$. Ein Spiel S bestehe darin, daß zwei Züge von U hintereinander gemacht werden und als Merkmal das geordnete Paar (i, k) der beiden in diesen Zügen aus U erscheinenden Merkmale genommen wird. Die Gruppe von S ist das freie Produkt von $\mathfrak{S}^R$ mit sich selbst. Sie ist transitiv, d. h. die Paare (i, k) sind gleichmögliche Grundmerkmale von S.

Genau dasselbe gilt, wenn jeder Zug von S aus n Zügen von U besteht: Die R^n Merkmale $(i_1, i_2, \ldots i_n)$ von S sind gleichmögliche Grundmerkmale. In S gilt also die *Laplace*sche Wahrscheinlichkeitsdefinition (8,4) und wir bekommen auf althergebrachtem Weg durch Abzählen der Fälle für Urnenmerkmale die *Newton*sche Formel:

(9,5) Ist a ein Urnenmerkmal mit der Wahrscheinlichkeit q und $p = 1 - q$, dann ist die Wahrscheinlichkeit $w_n(k)$ dafür, daß in n Zügen aus der Urne k-mal a gezogen wird

$$w_n(k) = w\left(h_n(a) = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} p^{n-k} q^k.$$

Daraus beweist man für Urnenmerkmale a in der üblichen Weise den *Bernoulli*schen Satz:

(9,51) Ist a ein Urnenmerkmal mit der Wahrscheinlichkeit $w(a)$, $\varepsilon > 0$ und $\sigma < 1$, dann gibt es ein N, so daß für $n > N$

$$w\left(|h_n(a) - w(a)| < \varepsilon\right) \geqq \sigma \text{ ist.}$$

Hier ist N eine angebbare Funktion von $w(a)$, ε und σ.

Wir wollen jetzt den *Bernoulli*schen Satz für beliebige Spiele beweisen. Es sei also $b \neq S$ Merkmal in einem Spiel S. $\varepsilon > 0$ und $\sigma < 1$ seien vorgegeben. U sei ein Urnenspiel mit $R < \frac{2}{\epsilon}$ Kugeln. m_i habe dieselbe Bedeutung wie in (9,01). Die ganze Zahl $v(b) = v$ sei so bestimmt, daß $m_{v(b)} \leqq b < m_{v(b)+1}$ ist. Mit der Bezeichnung $a = m_v$, $c = m_{v+1}$ haben wir also $a \leqq b < c$. Nach (9,5) gibt es ein N, so daß für $n > N$

*) $$w\left(|h_n(a) - w(a)| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \geqq \frac{\sigma+1}{2} \text{ und}$$

**) $$w\left(|h_n(c) - w(c)| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \geqq \frac{\sigma+1}{2} \text{ ist.}$$

Nach (9,4), wo wir $x = w(b) - \varepsilon$ setzen, gilt

***) $$h_n(a) > w(b) - \varepsilon \cdot \leqq \cdot h_n(b) > w(b) - \varepsilon.$$

Wegen (9,12) ist

$$w(a) = \frac{v(b)}{R} \leqq w(b) \leqq w(c) = \frac{v(b)}{R} + \frac{1}{R} < \frac{v(b)}{R} + \frac{\varepsilon}{2} = w(a) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daher ist $w(b) - \varepsilon < w(a) - \frac{\varepsilon}{2}$. Nach III ist also

$$+) \qquad h_n(a) > w(a) - \frac{\varepsilon}{2} \cdot < \cdot h_n(a) > w(b) - \varepsilon.$$

Ähnlich ist wegen (9,4)

$$++) \qquad h_n(b) \leqq w(b) + \varepsilon \cdot \geqslant \cdot h_n(c) \leqq w(b) + \varepsilon.$$

und wegen $w(b) + \varepsilon > w(c) + \frac{\varepsilon}{2}$ nach III

$$+++) \qquad h_n(c) < w(c) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \leqslant \cdot h_n(c) \leqq w(b) + \varepsilon.$$

Nun liefern einerseits ***, +, (9,12) und III

$$*+) \qquad w\left(h_n(b) > w(b) - \varepsilon\right) \geqq w\left(h_n(a) > w(a) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \geqq \frac{\sigma+1}{2}$$

andererseits ++, +++,

$$+*) \qquad w\left(h_n(b) \leqq w(b) + \varepsilon\right) \geqq w\left(h_n(c) < w(c) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \geqq \frac{\sigma+1}{2}$$

Setzen wir nun in (9,31) für a und a' die Merkmale $h_n(b) > w(b) - \varepsilon$ und $h_n(b) \leqq w(b) + \varepsilon$, dann erhalten wir aus *+ und +*

$$w\left\{w(b) - \varepsilon < h_n(b) \leqq w(b) + \varepsilon\right\} \geqq \sigma,$$

erst recht

$$w\left\{\left|h_n(b) - w(b)\right| \leqq \varepsilon\right\} \geqq \sigma \text{ für } n > N.$$

Für $b = S$ ist die Behauptung selbstverständlich. Damit haben wir den *Bernoulli*schen Satz für beliebige Spiele:

(9,6) Ist b Merkmal in einem beliebig oft wiederholbaren Spiel S und ist $\varepsilon > 0$, $\sigma < 1$, dann gibt es ein N, so daß für $n > N$

$$w\left(\left|h_n(b) - w(b)\right| \leqq \varepsilon\right) \geqq \sigma \text{ ist.}$$

Dieser Satz ist teils schwächer, teils stärker als die Aussage $w(b) = \lim_{n \to \infty} h_n(b)$. Er ist schwächer als die Limesaussage, weil er für $h_n(b)$ nur eine Wahrscheinlichkeit, die allerdings beliebig nahe an 1

gebracht werden kann, gibt, zwischen $w(b) - \varepsilon$ und $w(b) + \varepsilon$ zu liegen. Stärker ist (9,6), indem darin N eine angebbare Funktion[10] von $w(b)$, ε und σ ist, während in der Limesaussage das N grundsätzlich unbestimmt bleibt. Denn die Angabe eines solchen N würde die Behauptung enthalten, daß $|w(b) - h_n(b)| < \varepsilon$ für $n > N$ ist. Die ist aber sicher falsch. Man kann im Gegenteil die Wahrscheinlichkeit dafür ausrechnen, daß bei gegebenem n $|w(l) - h_n(b)| \geqq \varepsilon$ ist, und zwar ist diese Wahrscheinlichkeit $\neq 0$. Dazu bedarf es nur einer Ergänzung des *Bernoulli*schen Satzes, die wie er abgeleitet wird. Da sie in jeder brauchbaren Wahrscheinlichkeitslehre vorkommt, enthält jede solche Lehre, in der die Limesaussage vorkommt, einen Widerspruch. Man hat, um sich über ihn hinwegzutrösten, darauf hingewiesen, daß auch die Geometrie „falsche" Sätze enthalte, indem es in der Wirklichkeit keine Punkte, Geraden u. dgl. gebe, sondern nur Dinge, die ihnen nahekommen. Der Vergleich stimmt aber insofern nicht, als die Geometrie in sich widerspruchsfrei ist, während die obige Limesaussage in die Wahrscheinlichkeitslehre einen Widerspruch bringt. Nun läßt sich, wenigstens auf dem Boden der hier verwendeten klassischen Logik, aus einem Widerspruch, d. h. der gleichzeitigen Behauptung zweier einander entgegengesetzter Aussagen, jede auch falsche, wenn nur sinnvolle Aussage ableiten. Deshalb kann ein Widerspruch in einer Theorie nie so klein sein, daß er erträglich ist.

Verwendet man die Limesaussage zur Definition der Wahrscheinlichkeit, dann hat man erstens diesen Widerspruch, zweitens die in [8] genannte Schwierigkeit, die Unveränderlichkeit der Spielbedingungen zu definieren, drittens den folgenden Übelstand: Jede Aussage $w(a) = p$ in der $w(a)$ als $\lim\limits_{n \to \infty} h_n(a)$ definiert ist, sagt auch nur aus, daß dieser Grenzwert vorhanden und $= p$ ist. Sie sagt nur über die *unendliche* Folge der $h_n(a)$ etwas aus. Sie sagt aber nicht, was die $h_n(a)$ etwa für $0 < n \leqq 10^6$ treiben. Im Gegenteil, mit der Aussage $\lim\limits_{n \to \infty} h_n(a) = p$ ist jedes Verhalten der Folge $h_n(a)$ im Abschnitt $0 < n < R$ für beliebig großes R verträglich; d. h. eine auf die Limesdefinition der Wahrscheinlichkeit aufgebaute Wahrscheinlichkeitsrechnung sagt über die

---

[10] Es genügt, $N = \frac{w(b)\,(1-w(b))}{\varepsilon^2\,(1-\sigma)}$ oder auch, von w(b) unabhängig, $N = \frac{1}{4\,\varepsilon^2\,(1-\sigma)}$ zu nehmen. Vgl. etwa Mises R. v., Wahrscheinlichkeitsrechnung 1931, S. 173, 174.

Wirklichkeit nichts aus, weil in dieser keine unendlichen Folgen vorkommen[11].

Der *Bernoulli*sche Satz (9,6) gestattet es, die Wahrscheinlichkeit eines Merkmals in einem beliebig oft wiederholbaren Spiel dadurch mit beliebiger Sicherheit in beliebig enge Grenzen einzuschließen, daß man genügend viele Züge macht. Das ist die sogenannte *statistische Ermittlung* einer Wahrscheinlichkeit. Er ist damit die Grundlage für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Naturwissenschaft, Wirtschaft und Technik.

Nach (9,12) gilt für $w_A(a) \neq w_B(b)$ immer $a_A < b_B$ oder $b_B > a_A$. Aus (9,6) folgt auch, daß wir mit beliebiger Sicherheit ermitteln können, welche dieser beiden Möglichkeiten vorliegt, indem wir in $A \sqcap B$ hinreichend oft ziehen. Damit ist die Bedeutung des Zeichens $<$ soweit, als praktisch bedeutsam ist, festgelegt.

H. Teile eines Spiels.

S sei ein beliebig oft wiederholbares Spiel, a ein Merkmal in ihm, für das $w(a) \neq 0$ gilt. Dann erklären wir ein neues Spiel Sa, indem wir festsetzen, daß ein Zug von Sa folgendermaßen ausgeführt werden soll: Man ziehe so lange in S, bis zum ersten Mal a erscheint. Damit sei ein Zug von Sa gemacht. Das bei diesem Auftreten von a auftretende Grundmerkmal $x \subset a$ gelte als das in diesem Zug von Sa ermittelte Grundmerkmal von Sa. Sa heiße der a betreffende Teil von S, $S\bar{a}$ der zu Sa komplementäre Teil von S.

Es ist natürlich denkbar, daß ich auch bei beliebig lange fortgesetztem Ziehen aus S kein Grundmerkmal $x \subset a$ ziehe. Dann ist Sa kein Spiel und dann liegt ein Fall vor, in dem unsere weiteren Überlegungen über Sa keine Bedeutung haben. Wegen $w(a) \neq 0$ gibt es aber nach (9,6) zu jedem $\sigma < 1$ ein N, so daß für $n > N$

$$w(h_n(a) > 0) > \sigma$$

ist; d. h. man kann dadurch, daß man hinreichend oft zieht, das dauernde Ausbleiben von a beliebig unwahrscheinlich machen, z. B. unwahrscheinlicher als das Ziehen einer bestimmten unter 10^6 Kugeln bei einem Zug. Wir werden also in einer hinreichenden Anzahl von Zügen aus S mit beliebiger Sicherheit mindestens einmal a ziehen.

---

[11] Dieser Einwand gegen die Limesdefinition ist alt, z. B. findet er sich in aller Schärfe bei *Reichenbach*, Wahrscheinlichkeitslehre 1935, § 66, scheint aber wenig Eindruck gemacht zu haben. Auch *Reichenbach* trägt ihm nicht durch Verlassen der Limesdefinition Rechnung, sondern sucht einen anderen Ausweg.

Wir sagen auch Sa entstehe aus S durch Streichen von $\bar{a}$, genauer aller in $\bar{a}$ enthaltenen Grundmerkmale. Als Grundmerkmale in Sa sehen wir die in a enthaltenen Grundmerkmale von Sa an.

Nun sei $b \subset a$. $w_S(b) \leqq w_S(a) \neq 0$ seien gegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $w_{Sa}(b)$ von b in Sa? Ist kein Zweifel darüber möglich, welches Spiel S gemeint ist, dann schreiben wir für $w_{Sa}(b)$ auch $w_a(b)$.

Um die gestellte Frage zu beantworten, denken wir uns in S n Züge ausgeführt, wobei wir vorhaben, das n über alle Grenzen wachsen zu lassen. Zunächst sei aber n fest gewählt. $h_n(a)$ und $h_n(b)$ sind die Häufigkeiten in diesen n-Zügen. Die Ermittlung von $h_n(a)$ ist ein Spiel A, die von $h_n(b)$ ein Spiel B. A und B sind Sparten eines Spiels. Wir wollen mit α die Aussage $w(a) - \varepsilon < h_n(a) < w(a) + \varepsilon$, mit β die Aussage $w(b) - \varepsilon < h_n(b) < w(b) + \varepsilon$ bezeichnen. Dann gibt es nach (9,6) zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $q < 1$ ein N, so daß für $n > N$

$$w(\alpha) \geqq \frac{q+1}{2} \text{ und } w(\beta) \geqq \frac{q+1}{2} \text{ ist.}$$

Nach (9,32) ist also $w(\alpha \sqcap \beta) \geqq q$; d. h. die Wahrscheinlichkeit für das Zusammenbestehen der Ungleichungen α und β ist $\geqq q$. Wir dürfen $\varepsilon < w(a)$ voraussetzen. Wir verstehen unter φ die durch Division aus α und β entstehende Aussage

$$\varphi \cdot = \cdot \frac{w(b) - \varepsilon}{w(a) + \varepsilon} < \frac{h_n(b)}{h_n(a)} < \frac{w(b) + \varepsilon}{w(a) - \varepsilon}.$$

Dann gilt wegen III $\varphi \geqslant \alpha \sqcap \beta$. (9,12) liefert also

$$w(\varphi) \geqq w(\alpha \sqcap \beta) \geqq q.$$

$\frac{h_n(b)}{h_n(a)}$ ist die (relative) Häufigkeit von b in Sa. ψ sei die Aussage

$$\psi \cdot = \cdot w_{Sa}(b) - \varepsilon < \frac{h_n(b)}{h_n(a)} < w_{Sa}(b) + \varepsilon.$$

Dann gibt es nach (9,6) ein N', so daß für $n > N'$ $w(\psi) \geqq q$ ist. Nun sei $n > N$ und $n > N'$. Wir dürfen $q > \frac{1}{2}$ nehmen. Nach (9,32) ist

$$w(\varphi \sqcap \psi) \geqq w(\varphi) + w(\psi) - 1 \geqq 2q - 1 > 0.$$

Wäre $\frac{w(b)}{w(a)} < w_{Sa}(b)$, dann wäre für hinreichend kleines ε auch

$$\frac{w(b) + \varepsilon}{w(a) - \varepsilon} < w_{Sa}(b) - \varepsilon.$$

Dann widersprächen einander die Aussagen φ und ψ, was nach (9,11) durch unser Ergebnis $w(\varphi \sqcap \psi) > 0$ ausgeschlossen ist. Also ist

$$\frac{w(b)}{w(a)} \geqq w_{Sa}(b).$$ Ebenso zeigt man $$\frac{w(b)}{w(a)} \leqq w_{Sa}(b).$$

Wir haben also den Satz:

Sind $b \subset a$ Merkmale in dem beliebig oft wiederholbaren Spiel S und ist $w_S(a) \neq 0$, dann ist

$$w_{Sa}(b) = \frac{w_S(b)}{w_S(a)}.$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

(9,7) $$w_S(b) = w_a(b)\, w_S(a),$$

dann gilt sie auch für $w_S(a) = 0$. Sie erinnert an die Kettenregel der Differentialrechnung. Man kann sie daher die Kettenregel der Wahrscheinlichkeitsrechnung nennen.

I. Der Produktsatz.

A und B seien Sparten eines Spiels; a sei Merkmal in A, b in B. Nach (3,4) ist

$$a_A \asymp (a \sqcap B)_{A \sqcap B} \text{ und } b_B \asymp (A \sqcap b)_{A \sqcap B},$$

nach (9,12) also

$$w_A(a) = w_{A \sqcap B}(a \sqcap B \text{ und } w_B(b) = w_{A \sqcap B}(A \sqcap b).$$

Ferner ist $a \sqcap b \subset a \sqcap B$ und $a \sqcap b \subset A \sqcap b$. Nach (9,7) gilt also

(9,71) $$w_{A \sqcap B}(a \sqcap b) = w_{A \sqcap B}(a \sqcap B)\, w_{a \sqcap B}(a \sqcap b) \text{ und}$$

(9,72) $$w_{A \sqcap B}(a \sqcap b) = w_{A \sqcap B}(A \sqcap b)\, w_{A \sqcap b}(a \sqcap b);$$ d. h.

(9,81) $$w_{A \sqcap B}(a \sqcap b) = w_A(a)\, w_{a \sqcap B}(a \sqcap b) \text{ und}$$

(9,82) $$w_{A \sqcap B}(a \sqcap b) = w_B(b)\, w_{A \sqcap b}(a \sqcap b).$$

Daraus folgt:

(9,83) $$w_{A \sqcap b}(a \sqcap b) : w_A(a) = w_{a \sqcap B}(a \sqcap b) : w_B(b).$$

Wir sagen, das Merkmal a in A fördere b in B, sei gleichgültig gegen b, hemme b, je nachdem

$$w_{a \sqcap B}(a \sqcap b) \gtreqless w_B(b)$$

ist. Dann ist wegen (9,83) auch

$$w_{A \sqcap b}(a \sqcap b) \gtreqless w_A(a).$$

Mit Hilfe von (3,2) erkennen wir so:

(9,84) Die Beziehungen des Förderns, Gleichgültigseins und Hemmens sind wechselseitig.

Wenn a und b zu einander gleichgültig sind, nimmt (9,81) die Form

(9,85) $$w_{A \sqcap B}(a \sqcap b) = w_A(a)\, w_B(b) \text{ an.}$$

Wenn jedes Merkmal von A gegenüber jedem von B gleichgültig ist, heißen die Spiele A und B *von einander unabhängig*. Dann gilt (9,85) für je zwei Merkmale a, b von A und B.

(9,87) Jetzt gewinnt man in der üblichen Weise die *Newton*sche Formel (9,5) für beliebige Spiele.

Damit sind die Grundlagen für die übliche Entwicklung der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben.

J. Geometrische Wahrscheinlichkeiten.

K sei ein Kreis mit dem Umfang U, a ein Bogen auf ihm von der Länge $L(a)$. Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt von K in a liegt, hat nach der hier vorgetragenen Auffassung noch keinen Sinn. Das Spiel, in dem die Wahrscheinlichkeit gemeint sein soll, ist nämlich nicht beschrieben. Diese Beschreibung kann z. B. so lauten: Im Mittelpunkt von K stehe eine roulettartige Scheibe, auf der ein Radius R eingezeichnet ist. Man versetze die Scheibe wie beim Roulettespiel in rasche Drehung und warte, bis sie zur Ruhe kommt. Weist R dann auf einen Punkt von a, dann sei das Merkmal a erschienen, sonst $\bar{a}$. Natürlich muß man sich das Spiel dabei so idealisiert denken, daß Zweifel, ob R auf einen Punkt von a weist oder nicht, ausgeschlossen sind. Wir haben dann ein Spiel mit zwei Grundmerkmalen a und $\bar{a}$. Es kann so eingerichtet sein, daß $w(a) = \frac{L(a)}{U}$ ist, aber auch nicht. Wir können sofort mit derselben Scheibe eine andere Wahrscheinlichkeit $w(a)$ definieren, indem wir sie zwar immer noch innerhalb von K, aber nicht im Mittelpunkt aufstellen. Eine Wahrscheinlichkeit an sich erkennen wir dem Bogen a auf dem Kreis K nicht zu. Auf diese Weise kann ein Paradoxon wie das *Bertrand*sche nicht auftreten.

Anhang.[12]

[1] Ist p eine Aussage, so bezeichnen wir die Aussage „nicht p", das *Negat* von p, mit $\sim p$. Ist z. B. p die Aussage $1+1=2$, dann ist $\sim p$ die Aussage $1+1 \neq 2$. Die beiden Aussagen heißen einander entgegengesetzt. Von zwei einander entgegengesetzten Aussagen ist immer eine richtig und eine falsch, vorausgesetzt daß sie überhaupt sinnvoll sind.

[2] Sind p und q Aussagen, dann bezeichnen wir die *Disjunktion* „p oder q" mit $p \vee q$. Ist z. B. p die Aussage „Heute wird das Wetter schön sein", q die Aussage „Heute werde ich ausgehen", dann bedeutet $p \vee q$ die Aussage „Heute wird das Wetter schön sein oder ich werde ausgehen". Dabei meinen wir dieses „oder" so, daß die Aussage $p \vee q$ auch gilt, wenn sowohl p als auch q gilt. „p oder q" bedeutet für uns also immer „mindestens p oder q".

[3] Der Ausdruck $\sim p \vee q$ kann auf zwei Arten gelesen werden, nämlich $\sim (p \vee q)$, d. h. soviel wie „weder p noch q" und $(\sim p) \vee q$, d. h. „q oder nicht p". Um in solchen Fällen Eindeutigkeit zu erzwingen, deutet man die Reichweite eines logischen Zeichens nach den beiden Seiten dadurch an, daß man rechts und links davon hinreichend viele Punkte setzt. Die Regel, nach der diese Punkte gesetzt und gelesen werden, ist die: Ein logisches Zeichen Z ($\sim$, $\vee$ und andere noch einzuführende Zeichen) reicht nach rechts über alle derartigen Zeichen hinaus, die sowohl rechts als auch links weniger Punkte haben als Z an seiner rechten Seite. Entsprechendes gilt für die Punkte, mit denen die Reichweite von Z nach links angegeben wird. Die erste Lesart von $\sim p \vee q$ schreibt man z. B. $\sim \cdot p \vee q$, die zweite $\sim p \cdot \vee q$. Wir werden sofort Ausdrücke anschreiben, in denen man bei manchen Zeichen rechts und links mehrere Punkte anbringen muß.

[4] Will man die Bedeutung eines neu einzuführenden Zeichens erklären, dann setzt man es auf die linke, den definierenden Ausdruck auf die rechte Seite eines Gleichheitszeichens und schreibt neben das Ganze die Buchstaben *Df*. Dabei wird das als *Definitionszeichen* verwendete Gleichheitszeichen nach Bedarf rechts und links mit Punkten ausgestattet. Wir erklären auf diese Weise noch drei logische Zeichen:

---

[12] Diese Darlegung will nur dem Leser das Verstehen der vorstehenden Arbeit erleichtern. Ausführliches findet man in *Whitehead* und *Russell*, Principia mathematica. Vgl. auch *Hilbert-Ackermann*, Grundzüge der theoretischen Logik, 1928, S. 1—9.

[5] Wir bezeichnen mit $p \cdot q$ oder auch mit pq die *Konjunktion* „p und q". Mit den obigen Bedeutungen von p und q bedeutet pq die Aussage „Heute wird das Wetter schön sein und ich werde heute ausgehen". Die Konjunktion läßt sich mit der Negation und der Disjunktion folgendermaßen definieren:

$$pq \cdot = \therefore \sim : \sim p \cdot \vee \cdot \sim q \qquad Df.$$

Die Aussage „wenn p, dann q", in Zeichen $p \supset q$ wird folgendermaßen definiert

$$p \supset q \cdot = : \sim p \cdot \vee q \qquad Df.$$

Der definierende Ausdruck rechts sagt, wenn wir p und q wieder wie oben deuten, „Heute wird das Wetter nicht schön sein oder ich gehe heute aus". Diese Aussage sagt aus, daß ich bei schönem Wetter heute ausgehe, während sie darüber, was ich bei schlechtem Wetter tue, nichts sagt. Genau dasselbe leistet die Aussage „Wenn es heute schön ist, gehe ich heute aus". Wichtig ist hier, das „oder" in der oben festgelegten Bedeutung „mindestens oder" zu verstehen. Den Ausdruck $p \supset q$ liest man auch „p impliziert q" und nennt ihn eine *Implikation*. Die Implikation ist transitiv, d. h..es gilt

$$p \supset q : q \supset r : \supset \cdot p \supset r.$$

Hier mußte der die Konjunktion von $p \supset q$ mit $q \supset r$ anzeigende Punkt durch einen weiteren Punkt verstärkt werden.

[6] Zwei Aussagen p, q heißen äquivalent, wenn sie einander implizieren. Man schreibt dann $p \equiv q$. Die Definition der *Äquivalenz* lautet:

$$p \equiv q \cdot = : p \supset q : q \supset p \qquad Df.$$

Sehr viele logische Sätze werden in Form von Äquivalenzen ausgesprochen, z. B.:

$$p \vee q \cdot \equiv \cdot q \vee p.$$

Wir stellen noch einige Formeln zusammen, die in der vorstehenden Arbeit gebraucht werden:

[7] Die Formeln von *De Morgan*.

$$\sim \cdot p \vee q : \equiv : \sim p \,.\, \sim q$$
$$\sim \cdot p q : \equiv : \sim p \cdot \vee \cdot \sim q.$$

Die zweite dieser Formeln wurde oben (im Wesentlichen) zur Definition der Konjunktion aus der Disjunktion verwendet. Man könnte mit dem-

selben Recht durch die erste dieser Formeln die Disjunktion aus der Konjunktion erklären.

[8] Die Formel für die *Kontraposition* einer Implikation

$$p \supset q \cdot \equiv : \sim q \cdot \supset \cdot \sim p.$$

Sie ist das Schema des indirekten Beweises.

[9] Der *Leibniz*sche *Multiplikationssatz*

$$p \supset q : r \supset s : \supset : pr \cdot \supset \cdot qs$$

und der zugehörige *Additionssatz*

$$p \supset q : r \supset s : \supset : p \vee r \cdot \supset \cdot q \vee s.$$

Buchbesprechungen.

Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung. Von *A. Duschek* und *A. Hochrainer.* In drei Teilen. I. Teil: Tensoralgebra. Mit 26 Abb., VI, 129 S. Wien: Springer-Verlag. 1946. In Österreich: S 21.—. Im Ausland: sfr. 12.—.

Man liest und hört viel von Spannungstensoren oder von Krümmungstensoren, hat aber oft den Eindruck, daß nicht nur vielen Lesern, sondern auch manchen Autoren der Begriff „Tensor" nicht geläufig ist. Es ist aber doch selbstverständlich, daß man die Tensorrechnung nur dann mit Erfolg anwenden kann, wenn man die Grundbegriffe klar erfaßt hat. Es gibt zwar Bücher, in denen die Tensorrechnung in wissenschaftlich einwandfreier Form behandelt wird, aber diese Werke sind doch zu schwierig, um sich für Anfänger oder Ingenieure zu eignen. Das vorliegende Buch entwickelt die Grundbegriffe der Tensorrechnung in überaus klarer Weise, ohne besondere Vorkenntnisse vorauszusetzen. Es eignet sich daher nicht bloß für Mathematiker, sondern auch für Physiker und Ingenieure in den Forschungs- und Berechnungsabteilungen der Industrie. Bekanntlich ist jede Geometrie identisch mit der Invariantentheorie einer bestimmten Transformationsgruppe und insbesondere die euklidische Geometrie identisch mit der Invariantentheorie der Bewegungsgruppe. Die Tensorrechnung ist nun ein besonders zweckmäßiges Rechenverfahren zur Ermittlung der Invarianten und invarianten Relationen. Daher muß der Begriff des Tensors und insbesonders auch der des Vektors (Tensor 1. Stufe) von der Transformationsgruppe her erfaßt werden. Sie sind zu definieren durch das Verhalten ihrer Koordinaten bei Ausführung einer Bewegung des Koordinatensystems. Also nicht irgend drei Zahlen bilden einen Vektor und nicht irgend ein quadratisches Schema von neun Zahlen bildet einen Tensor 2. Stufe, sondern nur dann, wenn sie sich bei einer Änderung des Koordinatensystems in ganz bestimmter Weise ändern. Das Buch bringt die Vektoralgebra und die Tensoralgebra in „analytischer" Darstellung, also in enger Anlehnung an die Methoden der analytischen Geometrie und steht damit im Gegensatz zur sogenannten „symbolischen" oder „koordinatenfreien" oder „direkten" Methode, die in der Vektorrechnung im allgemeinen üblich ist. Die „analytische" Methode arbeitet mit den aus der analytischen Geometrie wohlbekannten Koordinaten, die aber auch in der angeblich „koordinatenfreien" Methode wenigstens indirekt vorkommen. Beide Methoden erfordern die Aneignung von grundlegenden Begriffen und Symbolen und einige Übung. So verlangt die analytische Methode einige Vertrautheit mit dem Rechnen mit Indizes, aber der ganze Rechenapparat ist keineswegs schwer zu erfassen. Manche Formeln sehen auf den ersten Blick nicht einfach aus, sind aber leicht zu verstehen. Man braucht sich jedenfalls keine nichtssagenden Symbole zu merken. Die analytische Methode hat auch den Vorteil, daß sie das Rechnen mit Vektoren (Tensoren 1. Stufe) und das Rechnen mit Tensoren 2. und höherer Stufe einheitlich durchführt. Da viele Leser mit der symbolischen Methode vertraut sind, so werden hier die wichtigen Formeln auch in der symbolischen Form angeschrieben. Dies erleichtert dem Leser den Übergang zur analytischen Methode und regt zum Vergleich an. Das endgültige Urteil über die Methoden wird schließlich von der Erfahrung gesprochen werden.

N. Hofreiter, Wien.

Allgemeine Methodenlehre der Statistik. Ein Lehrbuch für alle wissenschaftlichen Hochschulen. Von *F. Klezl-Norberg.* Zweite ergänzte Auflage. Mit 14 Textabb., XVI, 279 S. Wien: Springer-Verlag. 1946. In Österreich S 27.—. Im Ausland: sfr. 24.—.

Das Buch soll hier nur vom mathematischen Standpunkt aus besprochen werden; diese Einschränkung ist wichtig, da Erörterungen über das Wesen der Statistik, ihre Geschichte und Bedeutung einen ziemlich breiten Raum einnehmen. Auch zur Definition der Wahrscheinlichkeit (Anzahl der günstigen Fälle durch Anzahl der möglichen Fälle) möchte ich für eine weitere Auflage nur eine stärkere Berücksichtigung der Gedankengänge von *Mises* (der übrigens hier zitiert wird) wünschen. Dann wird noch die Anzahl der Permutationen, Variationen, Kombinationen — aufgeschrieben (ohne Ableitung), ebenso der binomische Satz in einem Beispiel, die Binomialverteilung und die *Gauß*sche Kurve (ohne Formel, nur gezeichnet). Ferner einige Mittelwerte, mittlere wahrscheinliche und durchschnittliche Abweichung für arithmetische Verteilungen; etwas weniges (fast ohne Formeln) über Ausgleichung, Interpolation und Extrapolation und schließlich über Korrelation.

Das Buch ist ersichtlich für solche bestimmt, die in der Praxis mit statistischen Aufgaben zu tun haben, aber die mathematische Theorie als solche scheuen; der Mathematiker möchte aber zu bedenken geben, ob nicht eine „erzählte Mathematik" immer schwerer ist als eine „gerechnete"; bei der großen und immer steigenden Bedeutung der Statistik geht es doch nicht an, den Mann der Praxis nur mit Andeutungen einer Formel abzuspeisen, weil dieser dann, wenn etwas aus dem Rahmen fällt, meist hilflos dasteht. —

Das Buch hat in Kürze seine zweite Auflage erlebt. *H. Hornich*, Wien.

Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer. Von *J. L. Krames.* Mit 282 Textabb. und 2 Tafeln. VIII., 231 S. Wien: F. Deuticke. 1947. S 24.—.

Das vorliegende handliche Lehrbuch wendet sich in erster Linie an den Maschinenbauer, dem es in knapper und anschaulicher Form nicht nur das nötige Rüstzeug zur zeichnerischen Darstellung technischer Objekte und zur Bewältigung der mit diesen verknüpften räumlichen Aufgaben vermittelt, sondern den es auch in die Bewegungsgeometrie der Ebene und des Raumes einführt, die die Grundlage der Getriebelehre bildet. Es wird aber auch jeder andere geometrisch interessierte Leser — insbesondere der Mittel- und Fachschullehrer — Nutzen aus dem Buche ziehen und manche Anregung finden.

Im Vordergrund steht naturgemäß die Abbildung mittels zugeordneter Normalrisse, in welcher zunächst die Grundaufgaben der Raumgeometrie gelöst werden. Nach Erörterung der einfachsten Begriffe der Kurven- und Flächentheorie wird die Kreisdarstellung behandelt, im Zusammenhang mit den Kegelschnitten auch die perspektive Affinität und Kollineation besprochen. Die folgenden Abschnitte sind den wichtigsten Flächenarten (Zylinder, Kegel, Kugel, Dreh- und Schraubflächen, abwickelbare und graphische Flächen) und ihren ebenen und gegenseitigen Schnitten gewidmet. Neben der Umrißermittlung werden auch — in der Absicht, die Raumvorstellung zu schulen — immer wieder Schattenkonstruktionen durchgeführt.

Ein Abschnitt ist den achsonometrischen Abbildungsverfahren eingeräumt, während auf die für den Maschinenbauer entbehrliche Perspektive verzichtet wird. Die beiden Schlußkapitel behandeln die ebene, sphärische und räumliche Kinematik mit den üblichen Anwendungen auf Kurbeltriebe und Verzahnungen. Eine beigefügte durchsichtige Doppeltafel ermöglicht eine ebene Bewegung

(und ihre Umkehrung) modellmäßig zu beobachten, was das Verständnis sehr erleichtert. Bemerkenswert ist die einfache Ableitung der Konstruktion von *Euler-Savary* für den Bahnkrümmungsmittelpunkt, ferner der Versuch, die allgemeine Raumbewegung samt dem Nullsystem der Momentanschraubung elementar zu behandeln.

Die erreichte Kürze des Textes wird infolge der zahlreichen und vorzüglichen Abbildungen nicht als erschwerend empfunden. *W. Wunderlich*, Wien.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien IV, Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik Ges. m. b.H., Innsbruck, Innrain 27—29. - Papierzuweisung: 101/47/10/805.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Acta Physica Austriaca

Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften

Herausgegeben von

K. W. Fritz Kohlrausch — Graz

Hans Thirring — Wien

Schriftleitung:

Paul Urban

Graz

Die Zeitschrift erscheint zwanglos nach Maßgabe einlangenden Materials in einzeln berechneten Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von etwa 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis des Einzelheftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Jährlich erscheint ein Band.

Bisher sind erschienen:

Band I, Heft 1. Mit 34 Abbildungen. 104 Seiten. 1947 . In Österreich S 24.—; im Ausland sfr 12.—
Band I, Heft 2. Mit 28 Abbildungen. 95 Seiten. 1947 . . In Österreich S 28.—; im Ausland sfr 14.—
Band I, Heft 3. Mit 15 Abbildungen. 87 Seiten. 1948 . In Österreich S 28.—; im Ausland sfr 14.—

Österreichisches

Ingenieur-Archiv

Herausgegeben von

K. Federhofer-Graz · **P. Funk**-Wien · **W. Gauster**-Wien
K. Girkmann-Wien · **F. Hopfner**-Wien · **F. Jung**-Wien
F. Magyar-Wien · **E. Melan**-Wien · **K. Wolf**-Wien

Schriftleitung:

F. Magyar-Wien und **K. Wolf**-Wien

Das Archiv erscheint zwanglos nach Maßgabe des einlaufenden Materials in einzeln berechneten Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von etwa 400 Seiten (4°) vereinigt werden. Der Preis des Einzelheftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Jährlich erscheint ein Band.

Bisher sind erschienen:

Band I, Heft 1/2 (abgeschlossen am 12. Juli 1946)
Mit 83 Abbildungen. 137 Seiten . . . . In Österreich S 48.—; im Ausland sfr 36.—
Band I, Heft 3 (abgeschlossen am 31. Oktober 1946)
Mit 68 Abbildungen. 109 Seiten . . . . In Österreich S 42.—; im Ausland sfr 30.—
Band I, Heft 4/5. Schlußheft (abgeschlossen am 31. Juli 1947)
Mit 91 Abbildungen, 180 Seiten . . . . . In Österreich S 78.—; im Ausland sfr 44.—
Band II, Heft 1 (abgeschlossen am 20. November 1947)
Mit 20 Abbildungen, 88 Seiten . . . . . In Österreich S 38.—; im Ausland sfr 22.—
Band II, Heft 2 (abgeschlossen am 15. Jänner 1948)
Mit 35 Abbildungen, 80 Seiten . . . . . In Österreich S 38.—; im Ausland sfr 22.—

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria.